TD 5 - Plus de compacité

Le but de cette feuille de TD est de voir pourquoi le théorème de compacité du calcul propositionnel est un résultat de compacité. On va avoir besoin du théorème de Tychonov, qui dit que tout produit de compacts est compact. Ce dernier est une conséquence de l'axiome du choix et lui est en fait équivalent. On admet donc l'axiome du choix.
Rappelons tout d'abord que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques, leur produit $\prod_{i\in I} X_i$ est muni de la topologie produit dont une base d'ouverts est donnée par les ensembles de la forme

$$\{(x_i) : (x_{i_1}, ..., x_{i_k}) \in U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k}\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et U_{i_1},..., U_{i_k} sont des ouverts respectifs de $X_{i_1}, ..., X_{i_k}$. On se propose de montrer le théorème de Tychonov en utilisant les ultrafiltres.
Tous les espaces topologiques considérés sont séparés, c'est-à-dire que pour tous $x \neq y \in X$ on peut trouver deux ouverts U et V disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Exercice 1. Filtres et topologie.
Commençons par définir les filtres, qui fournissent une notion de "gros sous-ensembles" d'un ensemble X. Soit X un ensemble. Un **filtre** sur X est une partie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que :

(a) $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies ;

(b) Pour tout $F \in \mathcal{F}$, toute partie G de X contenant F appartient également à $\mathcal{F}$;

(c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1. Montrer que si X est un ensemble infini, l'ensemble des parties de X dont le complémentaire est fini est un filtre sur X. C'est le filtre $\mathcal{F}_{cof}(X)$ des parties cofinies sur X.

Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une **base de filtre** si elle est stable par intersection finie et ne contient pas l'ensemble vide.

2. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de filtre, l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ des parties F de X telles qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $B \subseteq F$ est un filtre. On l'appelle le filtre engendré par $\mathcal{B}$.
3. Soient X et Y deux ensemble et $f : X \to Y$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, montrer que l'ensemble $f_*\mathcal{F} = \{G \in Y : f^{-1}G \in \mathcal{F}\}$ est un filtre.

On appelle $f_*\mathcal{F}$ le **filtre image** de $\mathcal{F}$ par f.

4. On suppose que X est un espace topologique. Pour $x \in X$, on définit $\mathcal{V}_x$ comme l'ensemble des voisinages de x. Montrer que $\mathcal{V}_x$ est un filtre.

Un filtre $\mathcal{F}$ est **plus fin** qu'un filtre $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Si X est un espace topologique et si le filtre $\mathcal{F}$ raffine $\mathcal{V}_x$, on dit que $\mathcal{F}$ **converge** vers x.

5. Soit $f : \mathbb{N} \to X$ une suite. Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si et seulement si le filtre $f_*(\mathcal{F}_{cof}(\mathbb{N}))$ converge vers x.
6. Montrer que si un filtre converge vers x et vers x', alors $x = x'$.

Exercice 2. Ultrafiltres.
Un filtre $\mathcal{U}$ sur X est un ultrafiltre s'il n'existe pas de filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{U}_x = \{F \in \mathcal{P}(X) : x \in F\}$ est un ultrafiltre. On dit que c'est un ultrafiltre **principal**.
2. Montrer qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur X est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \subseteq X$, on a soit $A \in \mathcal{U}$ soit $X \setminus A \in \mathcal{U}$.
3. Montrer que si X est fini, tous les ultrafiltres sur X sont principaux.
4. Montrer que pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X plus fin que $\mathcal{F}$.
5. Montrer que si X est infini, il existe des ultrafiltres sur X non principaux.
6. Montrer que l'image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.

Exercice 3. Valeurs d'adhérence.
On dit que deux filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur X sont compatibles s'il existe un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ à la fois. Si $\mathcal{F}$ est un filtre, on dit que $x \in X$ est une **valeur d'adhérence** de $\mathcal{F}$ si les filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_x$ sont compatibles.

1. Montrer que x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout V voisinage de x et tout $F \in \mathcal{F}$, on a $\overline{F} \cap V \neq \emptyset$.
2. Montrer que tout ultrafiltre admet au plus une valeur d'adhérence, et que si cette dernière existe alors il converge vers elle.
3. Soit X un ensemble, on munit $\mathcal{P}(X) = \{0,1\}^X$ de la topologie produit. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si $\chi_{A*}(\mathcal{U})$ converge pour tout $A \subseteq X$.
4. Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques, on note $\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ la projection sur la i-ème coordonnée. Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur $\prod_{i\in I} X_i$ est convergent ssi pour $i \in I$, le filtre $\pi_{i*}(\mathcal{F})$ est convergent.

Solution de l'exercice 3.

1. Commençons par remarquer que si deux filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont compatibles, alors pour tous $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ on a $A \cap B \neq \emptyset$. Ceci est en fait une caractérisation comme on le vérifie aisément (l'ensemble des $A \cap B$ où $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ est une base de filtre dès lors que ces intersections sont toutes non vides).

   Supposons maintenant que x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$, soit V un voisinage de x et soit $F \in \mathcal{F}$, alors d'après ce qui vient d'être dit on doit avoir $V \cap F \neq \emptyset$, en particulier $V \cap \bar{F} \neq \emptyset$.

   Réciproquement si pour tout V voisinage de x et tout $F \in \mathcal{F}$ on a $V \cap \overline{F} \neq \emptyset$ alors si on fixe tout d'abord $F \in \mathcal{F}$, on voit que si V est un voisinage ouvert de x disjoint de F, alors V est disjoint de $\overline{F}$ par définition de l'adhérence ce qui est absurde. Donc V intersecte F, et la réciproque voulue est établie.
2. On va répondre à la question dans l'ordre inverse : si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, tout filtre compatible avec lui doit être contenu dans lui par maximalité. En appliquant ceci à un filtre de voisinages, on voit que si x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$ alors $\mathcal{U}$ converge vers x. On applique alors la question 6 de l'exercice 1 pour voir que $\mathcal{U}$ n'a donc qu'au plus une valeur d'adhérence.
3. Si $\mathcal{F}$ est un filtre, $\chi_{A*}\mathcal{F}$ est un filtre sur $\{0,1\}$. Par définition, dire qu'il converge vers 1 équivaut à dire que $A \in \mathcal{F}$ tandis que dire qu'il converge vers 0 revient à dire que $X \setminus A \in \mathcal{F}$. D'après la question 2 de l'exercice 2, on a donc que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre ssi pour tout A, $\chi_{A*}\mathcal{F}$ converge.
4. On va montrer que $\mathcal{F}$ converge vers $(x_i)_{i\in I}$ ssi pour tout i, $\pi_{i*}\mathcal{F}$ converge vers x_i.

   Si $\mathcal{F}$ converge vers $(x_i)_{i\in I}$, fixons $i_0 \in I$ et considérons un voisinage V de x_{i_0}. Alors par définition de la topologie produit $\pi_{i_0}^{-1}V$ est un voisinage de $(x_i)_{i\in I}$ et appartient donc à $\mathcal{F}$, ce qui nous assure que $V \in \pi_{i_0*}\mathcal{F}$. Ainsi $\pi_{i_0*}\mathcal{F}$ converge vers x_{i_0}.

   Réciproquement, soit V un voisinage de $(x_i)_{i\in I}$. Par définition de la topologie produit on trouve $i_1, ..., i_k \in I$ et soit et soit $U_{i_1}, ..., U_{i_k}$ des ouverts contenant respectivement $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ tels que V contienne

   $$\{(y_i) : (y_{i_1}, ..., y_{i_k}) \in U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k}\} = \bigcap_{l=1}^{k} \pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l}).$$

   Alors pour $l = 1, ..., k$, on a $U_{i_l} \in \pi_{i_l*}\mathcal{F}$, autrement dit $\pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l}) \in \mathcal{F}$ donc V contient l'intersection de k éléments de $\mathcal{F}$ et donc V est dans $\mathcal{F}$ comme voulu, ce qui établit que $\mathcal{F}$ converge vers $(x_i)_{i\in I}$.

Exercice 4. Compacité.

Un espace topologique séparé X est **compact** s'il satisfait les propriétés équivalentes suivantes :

(a) De tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini ;

(b) Toute famille de fermés dont les intersections finies sont non vides est d'intersection non vide.

1. Montrer que s'équivalent :
   (i) X est compact ;
   (ii) Tout filtre $\mathcal{F}$ sur X admet une valeur d'adhérence ;
   (iii) Tout ultrafiltre sur X est convergent.
2. En déduire une preuve du théorème de Tychonov : tout produit d'espaces compacts est compact.

Solution de l'exercice 4.

1. (i)$\Rightarrow$(ii) Si X est compact, on applique la caractérisation de la compacité en termes d'intersections de fermés à la famille des $\overline{F}$ où $F \in \mathcal{F}$. Par propriété de filtre les intersections finies de ces éléments sont non vides, on trouve x dans l'intersection et on applique alors la question 1 de l'exercice précédent pour voir que $\mathcal{F}$ admet x pour valeur d'adhérence.

   (ii)$\Rightarrow$(iii) est une conséquence directe de la question 2 de l'exercice 3.

   (iii)$\Rightarrow$(ii) car tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

(ii)$\Rightarrow$ (i) soit une famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés dont les intersection finies sont non vides. Considérons le filtre engendré par l'ensemble de ces intersections finies. Si x est une valeur d'adhérence de ce filtre, alors x est dans l'intersection de tels fermés car à i fixé, tout voisinage de x intersecte F_i et et F_i est fermé donc $x \in F_i$.

2. On va le prouver avec les ultrafiltres, en s'appuyant sur la dernière question de l'exercice précédent. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de compacts, on se donne $\mathcal{U}$ ultrafiltre sur $\prod X_i$, alors pour chaque i on a que $\pi_{i*}\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X_i (question 6 de l'exercice 2) donc converge vers un $x_i \in X_i$ (bien défini par la question 6 de l'exercice 1). Alors d'après la question 4 de l'exercice 3, on que $\mathcal{U}$ converge vers $(x_i)_{i\in I}$, donc tout ultrafiltre sur $\prod_{i\in I} X_i$ converge, et ce dernier est donc compact.

Exercice 5. Théorème de compacité du calcul propositionnel via Tychonov.

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables du calcul propositionnel. On remarque que l'ensemble des d.v.v. sur $\mathcal{P}$ n'est d'autre que $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$ que l'on munit de la topologie produit.

1. Montrer que l'ensemble des d.v.v. sur $\mathcal{P}$ est compact
2. Montrer que si Σ est un ensemble de formules propositionnelles, l'ensemble des d.v.v. la satisfaisant est fermé.
3. En déduire le théorème de compacité du calcul propositionnel.

Solution de l'exercice 5.

1. C'est une conséquence directe du théorème de Tychonov car $\{0,1\}$ est compact.
2. On montre par induction sur les formules que l'ensemble des d.v.v. la satisfaisant est ouvert-fermé. (le fait qu'il soit aussi ouvert est important, c'est ce qui permet de passer à la négation). Ensuite, l'ensemble des d.v.v. satisfaisant un ensemble de formules propositionnelles est fermé comme intersection de fermés.
3. Pour un ensemble Σ quelconque de formules, on note D_Σ l'ensemble des d.v.v. le satisfaisant, fermé par la question précédente. Si Σ est finiment satisfaisable on considère l'ensemble des fermés D_{Σ_0} où Σ_0 est une partie finie de Σ. Remarquons que $D_{\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_n} = D_{\Sigma_1}\cap\cdots\cap D_{\Sigma_n}$ donc comme une union finie d'ensemble finis est finie et Σ est finiment satisfaisable cet ensemble de fermés satisfait que toutes ses intersections finies sont non vides. Par compacité on a donc
$$\bigcap_{\Sigma_0\subseteq\Sigma \text{ finie}} D_{\Sigma_0} \neq \emptyset$$
Mais $\bigcap_{\Sigma_0\subseteq\Sigma \text{ finie}} D_{\Sigma_0} = D_\Sigma$ donc Σ est satisfaisable.