

---

## TD 6 - Applications du théorème de compacité

---

### Exercice 1. Théories finiment axiomatisables.

1. Montrer que si une théorie  $T$  est finiment axiomatisable, et si  $A$  est une axiomatisation de  $T$ , alors  $A$  contient une axiomatisation finie de  $T$ .
2. Soit  $X$  est un ensemble, on considère l'ensemble  $\mathcal{P}_f(X)$  des parties finies de  $X$ . Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathcal{P}_f(X) : \exists Y \in \mathcal{P}_f(X), \{B \in \mathcal{P}_f(X) : A \subseteq B\}\}$$

est un filtre sur  $\mathcal{P}_f(X)$ .

3. Montrer qu'une théorie  $T$  est finiment axiomatisable ssi l'ensemble des  $\mathcal{L}$ -structures  $\mathfrak{M}$  qui ne sont *pas* des modèles de  $T$  est stable par ultraproduit.

### Solution de l'exercice 1.

1. Commencer par remarquer que si on est finiment axiomatisable, on est axiomatisable par un énoncé (la conjonction des axiomes). Soit  $\varphi$  un énoncé qui axiomatise  $T$ , si  $\varphi$  n'est conséquence d'aucune partie finie de  $A$  alors par compacité  $\neg\varphi \cup A$  est cohérente, contradiction.
2. C'est du cours (cf. preuve du théorème de Los)
3. C'est également une conséquence du théorème de compacité. Dans un sens si  $T$  est axiomatisée par  $\varphi$ , alors ne pas être modèle de  $T$  c'est être modèle de  $\neg\varphi$  donc stable par ultraproduit. Dans l'autre, on fait un ultraproduit sur toutes les parties finies de  $T$  en choisissant pour chaque partie un modèle de la partie finie qui ne soit pas un modèle de  $T$  tout entier (cf. Cori-Lascar tome 2, exo 13 du chap. 8).

### Exercice 2. Théories axiomatisables.

Parmi les classes de structures suivantes, déterminer celles dont la théorie est finiment axiomatisable, axiomatisable (mais pas finiment), ou non axiomatisable :

- |   |   |
|---|---|
| (i) ensembles non dénombrables  | (ii) corps de caractéristique non nulle |
| (iii) corps de caractéristique nulle  | (iv) anneaux infinis                    |
| (v) groupes d'exposant fini (dans $\mathcal{L}_{gp} = \{e, \circ, (\cdot)^{-1}\}$ ) | (vi) groupes abéliens sans torsion      |
| (vii) groupes abéliens divisibles   | (viii) groupes abéliens finis           |
| (ix) groupes d'exposant $n$ (pour $n$ fixé)   | (x) ordres discrets                     |

### Solution de l'exercice 2.

### Exercice 3. Modèles non-standards.

Si  $\mathfrak{M}$  est une  $\mathcal{L}$ -structure, on note  $\text{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-énoncé} \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}$  la *théorie* de  $\mathfrak{M}$ .

1. Soit  $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$  le corps des réels (dans le langage des corps ordonnés  $\mathcal{L}_{c.ord} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$ ).

- (a) Montrer qu'il existe un modèle  $\mathfrak{R}' \models \text{Th}(\mathfrak{R})$  et un élément  $\alpha$  dans la structure  $\mathfrak{R}'$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $\mathfrak{R}' \models \alpha > \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  désigne le terme  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}$ .
- (b) En déduire que la classe des corps ordonnés *archimédiens* (pour tout  $x, y > 0$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $nx > y$ ) n'est pas axiomatisable dans  $\mathcal{L}_{c.ord}$ .
2. Soit  $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$  l'anneau des entiers. Montrer qu'il existe un modèle  $\mathfrak{Z}^* \models \text{Th}(\mathfrak{Z})$  contenant un élément  $\alpha$  qui est divisible par une infinité d'éléments distincts.
3. On considère la structure  $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ , dans le langage des ordres stricts. Montrer qu'il existe un modèle  $\mathfrak{Z}' = (\mathbb{Z}', <) \models \text{Th}(\mathfrak{Z})$  tel que  $(\mathbb{Q}, <)$  se plonge dans  $\mathfrak{Z}'$ .

#### Exercice 4. Graphes non-orientés.

Rappelons qu'un *graphe* est une structure  $\Gamma = (G; R^\Gamma)$ , avec  $\emptyset \neq G$  l'ensemble des *sommets* et  $R^\Gamma \subseteq G^2$  l'ensemble des *arêtes*. Nous considérons des graphes *non-orientés*, c.-à-d. nous supposons que  $R^\Gamma$  est symétrique et irreflexive.

Un uplet  $(g_0, \dots, g_n)$  est un *chemin* dans  $\Gamma$  si  $(g_i, g_{i+1}) \in R^\Gamma$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ . L'entier  $n$  est appelé la *longueur* du chemin. On dit qu'une partie  $H \subseteq G$  est *connexe* si pour tout  $h, h' \in H$  il existe un chemin  $(h_0, \dots, h_n)$  tel que  $h_i \in H$  pour tout  $i$  et  $h_0 = h, h_n = h'$ . Une partie  $C \subseteq G$  est une *composante connexe* de  $\Gamma$  si  $C$  est une partie connexe maximale de  $G$ . On voit que  $G$  est réunion disjointe de ses composantes connexes. On dit que  $\Gamma$  est connexe si  $G$  l'est.

Nous considérons les graphes comme structures dans  $\mathcal{L} = \{R\}$ , avec  $R$  un symbole de relation binaire.

- Donner une formule  $\psi_n(x, y)$  telle que pour tout graphe  $\Gamma$  et tout  $g, h \in G$  on ait  $\Gamma \models \psi_n[g, h]$  si et seulement s'il existe, dans  $\Gamma$ , un chemin de longueur  $n$  entre  $g$  et  $h$ .
- Montrer qu'il existe une  $\mathcal{L}$ -formule  $\phi_n(x_1, \dots, x_n)$  telle que pour tout graphe  $\Gamma$  et tout uplet  $\bar{g} \in G^n$  on ait  $\Gamma \models \phi_n[\bar{g}]$  si et seulement si  $(g_1, \dots, g_n)$  énumère une composante connexe de  $\Gamma$  de cardinal  $n$ .
- Montrer que si  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont deux graphes avec  $\text{Th}(\Gamma) = \text{Th}(\Delta)$  et si  $\Gamma$  contient au moins (respectivement, au plus)  $k$  composantes connexes de cardinal  $n$ , où  $k$  et  $n$  sont des entiers fixés, alors  $\Delta$  contient au moins (respectivement, au plus)  $k$  composantes connexes de cardinal  $n$ .
- Donner un exemple de graphe  $\Gamma$  dont toute composante connexe est finie et tel qu'il existe un graphe  $\Delta$  ayant une composante connexe infinie avec  $\text{Th}(\Gamma) = \text{Th}(\Delta)$ .
- Soit  $\Gamma_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}; R^{\mathbb{Z}})$ , où  $R^{\mathbb{Z}} = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{(i+1, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , et soit  $\Gamma'$  un graphe avec  $\text{Th}(\Gamma_{\mathbb{Z}}) = \text{Th}(\Gamma')$  tel que  $\Gamma' \not\cong \Gamma_{\mathbb{Z}}$ . Montrer que  $\Gamma'$  n'est pas connexe.
- En déduire que ni la connexité ni la non-connexité ne sont des propriétés axiomatisables pour les graphes.
- Montrer que  $\text{Th}(\Gamma_{\mathbb{Z}})$  est finiment axiomatisable.

#### Solution de l'exercice 4.

- Clair d'après la définition.
- Il faut dire qu'il y a un chemin entre  $x_1$  et chacun des  $x_i$  puis dire qu'aucun autre  $x$  n'est relié à  $x_1$ .
- Conséquence pas difficile de la question précédente.
- Il suffit de prendre un graphe avec des graphes complets finis de plus en plus grands. Alors la théorie de ce graphe est cohérente avec le fait d'avoir une infinité de constantes toutes reliées entre elles.

5. On raisonne par contradiction : si  $\Gamma'$  est connexe il est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Pour cela, il suffit d'utiliser le fait que tout sommet a exactement deux voisins et qu'il n'y a pas de cycles pour construire un plongement de  $\mathbb{Z}$  dans  $\Gamma'$  qui sera surjectif car  $\Gamma'$  est connexe.
6. La connexité n'est pas axiomatisable d'après la question précédente et le fait que l'on puisse trouver un  $\Gamma'$  de cardinal strictement plus grand que le cardinal de  $\mathbb{Z}$  mais non isomorphe d'après Lowenheim-Skolem ascendant. La non-connexité n'est donc pas axiomatisable non plus !
7. Il faut d'abord comprendre que la théorie de  $\Gamma_{\mathbb{Z}}$  est donnée par le fait que tout sommet soit de degré 2 et il n'y a pas de cycle. Pour voir ça, notons  $T$  la théorie qui dit que tout sommet soit de degré 2 et il n'y a pas de cycle, et montrons qu'elle est complète, elle sera alors égale à  $\text{Th}(\Gamma_{\mathbb{Z}})$ . La preuve de la question 5 nous montre qu'en fait tout modèle de  $T$  est une réunion disjointe de copies de  $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ . En particulier si  $\kappa$  est un cardinal non dénombrable, on voit que  $T$  est  $\kappa$ -catégorique. Ainsi  $T$  est complète CQFD.

### Exercice 5. Modèles non-standards.

Si  $\mathfrak{M}$  est une  $\mathcal{L}$ -structure, on note  $\text{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-énoncé} \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}$  la *théorie de  $\mathfrak{M}$* .

1. Soit  $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$  le corps des réels (dans le langage des corps ordonnés  $\mathcal{L}_{c.ord} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$ ).
  - (a) Montrer qu'il existe un modèle  $\mathfrak{R}' \models \text{Th}(\mathfrak{R})$  et un élément  $\alpha$  dans la structure  $\mathfrak{R}'$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $\mathfrak{R}' \models \alpha > \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  désigne le terme  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}$ .
  - (b) En déduire que la classe des corps ordonnés *archimédiens* (pour tout  $x, y > 0$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $nx > y$ ) n'est pas axiomatisable dans  $\mathcal{L}_{c.ord}$ .
2. Soit  $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$  l'anneau des entiers. Montrer qu'il existe un modèle  $\mathfrak{Z}^* \models \text{Th}(\mathfrak{Z})$  contenant un élément  $\alpha$  qui est divisible par une infinité d'éléments distincts.
3. On considère la structure  $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ , dans le langage des ordres stricts. Montrer qu'il existe un modèle  $\mathfrak{Z}' = (\mathbb{Z}', <) \models \text{Th}(\mathfrak{Z})$  tel que  $(\mathbb{Q}, <)$  se plonge dans  $\mathfrak{Z}'$ .

### Exercice 6. Espaces vectoriels.

Soit  $K$  un corps. On considère le langage  $\mathcal{L} = \{0, +, -\} \cup \{\lambda_r \mid r \in K\}$ , où 0 est un symbole de constante, + un symbole de fonction binaire et où - ainsi que les  $\lambda_r$  sont des symboles de fonction unaires.

Un  $K$ -espace vectoriel est naturellement une  $\mathcal{L}$ -structure (+ est interprété comme l'addition, 0 comme le vecteur 0, la fonction - par le passage au vecteur opposé, et  $\lambda_r$  comme la multiplication scalaire avec  $r$ ).

1. Montrer que l'on peut axiomatiser la classe des  $K$ -espaces vectoriels infinis dans  $\mathcal{L}$ . Soit  $T_K$  la théorie ainsi obtenue.
2. Soit  $\mathfrak{V} \models T_K$ . Décrire les sous-structures de  $\mathfrak{V}$ .
3. Montrer que pour tout  $\mathfrak{V} \models T_K$  il existe  $\mathfrak{V}^* \equiv \mathfrak{V}$  tel que  $\mathfrak{V}^*$  soit de dimension infinie.
4. Montrer que si  $K$  est fini, alors  $T_K$  est *totalemt catégorique*, c'est-à-dire  $\kappa$ -catégorique pour tout cardinal infini  $\kappa$ .  
Plus généralement, pour  $K$  quelconque, montrer que  $T_K$  est  $\kappa$ -catégorique pour tout  $\kappa$  infini avec  $\kappa > \text{card}(K)$ .
5. En déduire que  $T_K$  est une théorie complète.