TD 6 - Applications du théorème de compacité

Exercice 1. Théories finiment axiomatisables.

1. Montrer que si une théorie T est finiment axiomatisable, et si A est une axiomatisation de T, alors A contient une axiomatisation finie de T.
2. Soit X est un ensemble, on considère l'ensemble $\mathcal{P}_f(X)$ des parties finies de X. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathcal{P}_f(X) : \exists Y \in \mathcal{P}_f(X), \{B \in \mathcal{P}_f(X) : A \subseteq B\}\}$$
est un filtre sur $\mathcal{P}_f(X)$.
3. Montrer qu'une théorie T est finiment axiomatisable ssi la classe des $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ qui ne sont *pas* des modèles de T est stable par ultraproduit.

Exercice 2. Théories axiomatisables.
Parmi les classes de structures suivantes, déterminer celles dont la théorie est finiment axiomatisable, axiomatisable (mais pas finiment), ou non axiomatisable :

(i) ensembles non dénombrables

(ii) corps de caractéristique non nulle

(iii) corps de caractéristique nulle

(iv) anneaux infinis

(v) groupes d'exposant fini (dans $\mathcal{L}_{gp} = \{e, \circ, (\cdot)^{-1}\}$)

(vi) groupes abéliens sans torsion

(vii) groupes abéliens divisibles

(viii) groupes abéliens finis

(ix) groupes d'exposant n (pour n fixé)

(x) ordres discrets

Exercice 3. Modèles non-standards.
Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, on note $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \ \mathcal{L}\text{-énoncé} \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}$ la *théorie de* $\mathfrak{M}$.

1. Soit $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ le corps des réels (dans le langage des corps ordonnés $\mathcal{L}_{c.ord} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$).
   (a) Montrer qu'il existe un modèle $\mathfrak{R}' \models \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ et un élément α dans la structure $\mathfrak{R}'$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathfrak{R}' \models \alpha > \mathbf{n}$, où $\mathbf{n}$ désigne le terme $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$.
   (b) En déduire que la classe des corps ordonnés *archimédiens* (pour tout $x, y > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$) n'est pas axiomatisable dans $\mathcal{L}_{c.ord}$.
2. Soit $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ l'anneau des entiers. Montrer qu'il existe un modèle $\mathfrak{Z}^* \models \mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ contenant un élément α qui est divisible par une infinité d'éléments distincts.
3. On considère la structure $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$, dans le langage des ordres stricts. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{Z}' = (\mathbb{Z}', <) \models \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ tel que $(\mathbb{Q}, <)$ se plonge dans $\mathcal{Z}'$.

Exercice 4. Graphes non-orientés.
Rappelons qu'un *graphe* est une structure $\Gamma = (G; R^\Gamma)$, avec $\emptyset \neq G$ l'ensemble des *sommets* et $R^\Gamma \subseteq G^2$ l'ensemble des *arêtes*. Nous considérons des graphes *non-orientés*, c.-à-d. nous supposons que R^Γ est symétrique et irréflexive.

Un uplet $(g_0, \ldots, g_n)$ est un *chemin* dans Γ si $(g_i, g_{i+1}) \in R^\Gamma$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. L'entier n est appelé la *longueur* du chemin. On dit qu'une partie $H \subseteq G$ est *connexe* si pour tout $h, h' \in H$ il existe un chemin $(h_0, \ldots, h_n)$ tel que $h_i \in H$ pour tout i et $h_0 = h$, $h_n = h'$. Une partie $C \subseteq G$ est une *composante connexe* de Γ si C est une partie connexe maximale de G. On voit que G est réunion disjointe de ses composantes connexes. On dit que Γ est connexe si G l'est.

Nous considérons les graphes comme structures dans $\mathcal{L} = \{R\}$, avec R un symbole de relation binaire.

1. Donner une formule $\psi_n(x, y)$ telle que pour tout graphe Γ et tout $g, h \in G$ on ait $\Gamma \models \psi_n[g, h]$ si et seulement s'il existe, dans Γ, un chemin de longueur n entre g et h.
2. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\phi_n(x_1, \ldots, x_n)$ telle que pour tout graphe Γ et tout uplet $\overline{g} \in G^n$ on ait $\Gamma \models \phi_n[\overline{g}]$ si et seulement si $(g_1, \ldots, g_n)$ énumère une composante connexe de Γ de cardinal n.
3. Montrer que si Γ et Δ sont deux graphes avec $\mathrm{Th}(\Gamma) = \mathrm{Th}(\Delta)$ et si Γ contient au moins (respectivement, au plus) k composantes connexes de cardinal n, où k et n sont des entiers fixés, alors Δ contient au moins (respectivement, au plus) k composantes connexes de cardinal n.
4. Donner un exemple de graphe Γ dont toute composante connexe est finie et tel qu'il existe un graphe Δ ayant une composante connexe infinie avec $\mathrm{Th}(\Gamma) = \mathrm{Th}(\Delta)$.
5. Soit $\Gamma_\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}; R^\mathbb{Z})$, où $R^\mathbb{Z} = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{(i+1, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$, et soit Γ' un graphe avec $\mathrm{Th}(\Gamma_\mathbb{Z}) = \mathrm{Th}(\Gamma')$ tel que $\Gamma' \not\cong \Gamma_\mathbb{Z}$. Montrer que Γ' n'est pas connexe.
6. En déduire que ni la connexité ni la non-connexité ne sont des propriétés axiomatisables pour les graphes.
7. Montrer que $\mathrm{Th}(\Gamma_\mathbb{Z})$ n'est pas finiment axiomatisable.

Exercice 5. Espaces vectoriels.

Soit K un corps. On considère le langage $\mathcal{L} = \{0, +, -\} \cup \{\lambda_r \,|\, r \in K\}$, où 0 est un symbole de constante, $+$ un symbole de fonction binaire et où $-$ ainsi que les λ_r sont des symboles de fonction unaires.

Un K-espace vectoriel est naturellement une $\mathcal{L}$-structure ($+$ est interprété comme l'addition, 0 comme le vecteur 0, la fonction - par le passage au vecteur opposé, et λ_r comme la mutiplication scalaire avec r).

1. Montrer que l'on peut axiomatiser la classe des K-espaces vectoriels infinis dans $\mathcal{L}$. Soit T_K la théorie ainsi obtenue.
2. Soit $\mathfrak{V} \models T_K$. Décrire les sous-structures de $\mathfrak{V}$.
3. Montrer que pour tout $\mathfrak{V} \models T_K$ il existe $\mathfrak{V}^* \equiv \mathfrak{V}$ tel que $\mathfrak{V}^*$ soit de dimension infinie.
4. Montrer que si K est fini, alors T_K est *totalement catégorique*, c'est-à-dire κ-catégorique pour tout cardinal infini κ.

   Plus généralement, pour K quelconque, montrer que T_K est κ-catégorique pour tout κ infini avec $\kappa > \mathrm{card}(K)$.
5. En déduire que T_K est une théorie complète.