TD 8 - Complétude du calcul propositionnel

On se place dans le calcul propositionnel avec uniquement les symboles $\to$ et $\neg$. On va se donner trois schémas d'axiomes : étant données des formules propositionnelles A, B et C, les formules suivantes sont des axiomes :

— (A1) $A \to (B \to A)$

— (A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

— (A3) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

Si Σ est un ensemble de formules propositionnelles et A est une formule propositionnelle, on dit que A est *conséquence syntaxique* de Σ, et on écrit $\Sigma \vdash A$ s'il existe une démonstration formelle de A à partir de Σ, c'est-à-dire une suite finie $(A_1, ..., A_k)$ telle que pour tout $i = 1, ..., k$ une des trois conditions suivantes est remplie

— $A_i \in \Sigma$,

— A_i est un des axiomes ci-dessus,

— A_i a été déduite par *Modus Ponens* : il y a deux formules A_l et $A_m = (A_l \to A_i)$ avec $l, m < i$.

1. Remarquer les faits suivants que l'on utilisera sans mention par la suite :
   — $\{A\} \vdash A$;
   — si A est un axiome alors $\vdash A$;
   — si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ et $\Sigma_1 \vdash A$ alors $\Sigma_2 \vdash A$,
   — les segments initiaux d'une démonstration formelle sont des démonstrations formelles,
   — Si $\Sigma \vdash A$ alors il existe une partie finie Σ_0 de Σ telle que $\Sigma_0 \vdash A$,
   — Si $\Sigma \vdash A$ et $\Sigma \vdash (A \to B)$ alors $\Sigma \vdash B$.
2. Montrer que pour toute formule A, on a $\vdash A \to A$. On pourra partir de l'axiome (A2) avec $B = (A \to A)$ et $C = A$.
3. Montrer que $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$ ssi $\Sigma \vdash (A \to B)$ (c'est le lemme de déduction). Pour l'implication directe, on raisonnera par induction sur la longueur de la démonstration formelle de $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$.
4. En déduire que $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$ puis que $\{A \to (B \to C), B\} \vdash A \to C$.
5. En déduire les conséquences syntaxiques suivantes, que l'on pourra admettre dans un premier temps :
   (i) $\vdash (\neg\neg A \to A)$
   (ii) $\vdash (A \to \neg\neg A)$
   (iii) $\vdash (\neg A \to (A \to B))$
   (iv) $\vdash ((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$
   (v) $\vdash ((B \to A) \to (\neg A \to \neg B))$
   (vi) $\vdash (A \to (\neg B \to (\neg(A \to B))))$
   (vii) $\vdash ((A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.
6. Montrer que si $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$ et $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash B$ alors $\Sigma \vdash B$.
7. On dit que Σ est *contradictoire* s'il existe une formule A telle que $\Sigma \vdash A$ et $\Sigma \vdash \neg A$. Montrer que Σ est contradictoire ssi pour toute formule B, $\Sigma \vdash B$.
8. Montrer que si $\Sigma \vdash A$, toute dvv satisfaisant Σ satisfait A. On veut établir la réciproque dans le cas où Σ est finie, qui est la partie plus difficile du théorème de complétude.

9. Soit A une formule propositionnelle à variables parmis $P_1, ..., P_n$. Étant donnée une dvv δ sur $P_1, ..., P_n$, montrer par induction sur la complexité de A que $\{P_1^\delta, ..., P_n^\delta\} \vdash A^\delta$ où étant donnée une formule propositionnelle B, $B^\delta = B$ si $\delta(B) = 1$ et $B^\delta = \neg B$ si $\delta(B) = 0$.
10. En utilisant la question 6 déduire le théorème de complétude du calcul propositionnel : si A est satisfaite par toute dvv, alors $\vdash A$.