# TD 9 - Compléments sur les corps

**Exercice 1. Éléments algébriques.**
Soit $K \subseteq L$ une extension de corps.

1. Soit $x \in L$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   1. La $K$-algèbre engendrée par $x$ est de dimension finie sur $K$ ;
   2. Il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$ ;
   3. Les puissances de $x$ sont linéairement dépendantes.

   Si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée, on dit que $x$ est **algébrique** sur $K$.
2. Montrer que si $x$ et $y$ sont algébriques sur $K$, alors $x+y$ et $xy$ aussi. On pourra montrer que la $K$-algèbre engendrée par $x$ et $y$ est de dimension finie sur $K$.
3. En déduire que l'ensemble des éléments de $L$ algébriques sur $K$ est une $K$-algèbre. Est-ce un corps ?
4. Montrer que si $x$ est algébrique sur $K$, il existe un unique polynôme unitaire $P_x \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$. C'est le **polynôme minimal** de $x$. On pourra considérer le morphisme de $K$-algèbres $K[X] \to L$ donné par $P \mapsto P(x)$.
5. Montrer que si $x$ est algébrique sur $K$ alors la $K$-algèbre engendrée par $x$ est isomorphe à $K[X]/(P_x)$. Est-ce un corps ?

**Exercice 2. Extensions algébriques.**
On dit qu'une extension de corps $K \subseteq L$ est **algébrique** si tous les éléments de $L$ sont algébriques sur $K$.

1. Montrer que si $L$ est algébrique sur $K$ alors $|L| \leqslant \aleph_0 \, |K|$.
2. Montrer que Si $L$ est algébrique sur $K$, tout endomorphisme de $L$ trivial sur $K$ est un automorphisme.
3. Montrer que si $M$ est algébrique sur $L$ et $L$ est algébrique sur $K$ alors $M$ est algébrique sur $K$.
4. On dit que $L$ est une cloture algébrique de $K$ si $L$ est algébrique sur $K$ et $L$ est algébriquement clos. Montrer qu'une cloture algébrique existe toujours.
5. Soit $\bar{K}$ une cloture algébrique de $K$. Montrer que tout morphisme de $K$ dans un corps algébriquement clos $\Omega$ se prolonge en un morphisme $\bar{K} \to \Omega$.
6. En déduire que deux clotures algébriques de $K$ sont toujours isomorphes via un isomorphisme qui fixe $K$.

**Exercice 3. Bases de transcendance.**
Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Une base de transcendance pour $L$ sur $K$ est une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $L$ transcendante (pour tout $P \in K[X_1, ..., X_n]$ non nul et tous $i_1, ..., i_n \in I$, on ait $P(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \neq 0$) et maximale.

1. Montrer que $(x_i)_{i \in I}$ est transcendante ssi il existe un plongement de corps $\rho : K(X_i)_{i \in I} \to L$ qui est l'identité sur $K$ et envoie $X_i$ sur $x_i$. Remarquer qu'un tel plongement est unique.

2. Montrer que $L$ admet une base de transcendance sur $K$.

3. Soit $A$ une base de transcendance de $L$ sur $K$, soit $K(A)$ le corps engendré par $A$ et $K$. Montrer que $L$ est algébrique sur $K(A)$.
4. En déduire que $|L| \leqslant \aleph_0 |K(A)|$.
5. Montrer que toute base de transcendance de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ a cardinal $2^{\aleph_0}$ [1].
6. Montrer que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est complète. On pourra utiliser un va-et-vient entre des corps suffisament grands (utiliser Lowenheim-Skolem).

1. On peut montrer qu'en fait pour toute extension $K \subseteq L$, toutes les bases de transcendance de $L$ sur $K$ ont le même cardinal, que l'on appelle le **degré de transcendance** de $L$ sur $K$