DM 2 – à rendre le 7 novembre

Il s'agit du sujet de partiel de 2016. Le soin accordé à la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1.

1. Rappeler la notion de réduction d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ à un ensemble $B \subseteq \mathbb{N}$ vue en TD (on l'avait notée $A \leqslant B$). À quoi cette notion peut-elle servir ?
2. On dit qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est RE-complet si :
   — A est récursivement énumérable,
   — pour tout sous-ensemble récursivement énumérable $B \subseteq \mathbb{N}$, on a $B \leqslant A$.
   Montre qu'il existe un ensemble RE-complet.

Exercice 2.

1. Énoncer le théorème s-m-n.
2. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive α de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $\varphi^1_{\alpha(i,j)}$ est la fonction $x \mapsto \varphi^1_i(\varphi^1_j(x))$.

Exercice 3.

1. Énoncer le théorème de Rice.
2. Montrer que $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} \varphi^1_i \cap \operatorname{dom} \varphi^1_i = \emptyset\}$ n'est pas récursif.
3. Déterminer si A et $\mathbb{N} \setminus A$ sont récursivement énumérables ou non.
4. Nous avons énoncé le théorème de Rice pour des fonctions à 1 variable. Le démontrer pour des fonctions à p variables.

Exercice 4. Soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in \operatorname{Im} \varphi^1_i\}$.

1. Montrer que A est récursivement énumérable.
2. Montrer que A est infini.
3. Que pouvez-vous dire de $\mathbb{N} \setminus A$?

Exercice 5. Soit g dans $\mathcal{F}^*_1$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que pour tous x, y :

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) \\ f(x, y+1) &= f(f(x, y), y) \end{aligned}$$

2. Montrer que si g est récursive, alors f est récursive.