DM 3 – à rendre le 12 décembre

Le soin accordé à la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. CNF-Sat est NP-complet.
On considère le problème CNF-Sat suivant :
- **Donnée :** Une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive.
- **Question :** φ est-elle satisfaisable ?

1. Montrer que CNF-Sat est NP-complet.
2. En déduire que le problème DNF-Taut suivant est coNP-complet :
   - **Donnée :** Une formule propositionnelle φ sous forme normale disjonctive.
   - **Question :** φ est-elle une tautologie, c'est-à-dire est-elle satisfaite par toute d.v.v. ?

Exercice 2. Mon-Sat est NP-complet.
On considère le problème Mon-Sat suivant :
- **Donnée :** Une formule propositionelle φ en CNF dont chaque clause ne contient que des littéraux positifs ou que des littéraux négatifs.
- **Question :** φ est-elle satisfaisable ?

En partant de CNF-Sat puis en ajoutant pour chaque clause C une variable x_C et remplaçant C par deux clauses C^+ et C^-, montrer que Mon-Sat est NP-complet.

Exercice 3. Set-Cover est NP-complet.
On considère le problème Set-Cover suivant :
- **Donnée :** Une suite finie $(F_1, ..., F_m)$ de sous-ensembles de $\{1, ..., n\}$ (donnés par leurs fonctions caractéristiques) et un entier k.
- **Question :** Peut on trouver $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., m\}$ tels que $F_{i_1} \cup \cdots \cup F_{i_k} = \{1, ..., n\}$?

En utilisant Vertex-cover, montrer que ce problème est NP-complet.

Exercice 4. 2-Sat est dans P.
On considère le problème 2-Sat suivant :
- **Donnée :** Une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive avec au plus deux littéraux par clause.
- **Question :** φ est-elle satisfaisable ?

On veut montrer que 2-Sat est dans P. Pour cela on va utiliser un problème auxiliaire sur les graphes orientés qui reviendra à la fin du cours. On rappelle qu'un graphe orienté est un couple (V, E) où $E \subseteq V \times V$. On considère le problème GAP (graph accessibility problem) :
- **Donnée :** Un graphe orienté $G = (V, E)$ (sous forme de sa matrice d'adjacence) et deux sommets $x, y \in V$.
- **Question :** Existe-t-il un chemin entre x et y, c'est-à-dire une suite $v_1, ..., v_n$ avec $v_1 = x$, $v_n = y$ et pour tout $i = 1, ..., n-1$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$?

1. Montrer que GAP est dans P. On pourra s'inspirer de l'algorithme vu en TD pour montrer qu'un graphe non-orienté est connexe.
2. On considère le problème auxiliaire Ex2-Sat suivant :
   - **Donnée :** Une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive avec *exactement* deux littéraux par clause.
   - **Question :** φ est-elle satisfaisable ?

   Montrer que 2-Sat se réduit polynomialement à Ex2-Sat.

3. On va montrer que Ex2-Sat se réduit polynomialement à GAP.
   (a) Soit φ une instance de Ex2-Sat, et soit $(C_i)_{i \in I}$ une énumération de ses clauses. Posons $C_i = x_i \vee y_i$ où x_i et y_i sont des littéraux. Soit un graphe G_φ dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des littéraux de φ, et où pour chaque clause $C_i = x_i \vee y_i$ où x_i et y_i sont des littéraux on met une arête entre $\neg x_i$ et y_i et une arête entre $\neg y_i$ et x_i(NB : si x_i est de la forme $\neg x$, on considère que $\neg x_i = x$). On dit que G_φ est le **graphe d'implication** de φ. Pourquoi l'appeler ainsi ?
   (b) Montrer que si φ est satisfaisable, alors pour toute variable propositionelle x, il ne peut y avoir à la fois un chemin et x à $\neg x$ et de $\neg x$ à x.
   (c) (facultatif) On va montrer la réciproque : si pour toute variable propositionelle x, il ne peut y avoir à la fois un chemin et x à $\neg x$ et de $\neg x$ à x alors φ est satisfaisable. On suppose donc que pour toute variable propositionelle x, il ne peut y avoir à la fois un chemin et x à $\neg x$ et de $\neg x$ à x
      i) On introduit un pré-ordre $\prec$ sur le graphe d'implication G_φ donné par : pour tous littéraux x et y, $x \prec y$ ssi il existe un chemin de x à y. On pose également $x \sim y$ ssi ($x \prec y$ et $y \prec x$) ou $x = y$. Ainsi l'hypothèse s'écrit : pour tout littéral x, on a $x \not\sim \neg x$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et que $\prec$ passe au quotient en une relation d'ordre stricte $<$ sur $X/\sim$.
      ii) Montrer que si δ est une d.v.v. qui satisfait φ, alors elle doit assigner les mêmes valeurs aux éléments $\sim$-équivalents.
      iii) Si C est une classe d'équivalence de $\sim$, montrer que l'ensemble formée de toutes les négations des éléments de C est une classe d'équivalence de $\sim$, et que $C \mapsto \bar{C}$ renverse l'ordre $<$.
      iv) Montrer qu'on ne peut avoir $C = \bar{C}$.
      v) On construit alors une d.v.v. ainsi : on prend une $\sim$-classe C maximale pour $<$, on lui affecte Vrai et on affecte Faux à $\bar{C} \neq C$. Puis on enlève C, $\bar{C}$ et toutes les arêtes qui leur étaient reliées et on recommence. Montrer que l'algorithme nous fournit bien une d.v.v. satisfaisant φ.
   (d) En déduire que Ex2-Sat est dans P.
4. Conclure.