TD 2 – Fonctions récursives

Exercice 1. Soit r la fonction définie par $r(x) = \mu z.(z^2 = x)$ et s la fonction définie par le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{cases} s(0) = r(0) \\ s(n+1) = s(n) + r(n+1) \end{cases}$$

Que vaut la fonction s ?

Solution de l'exercice 1. $s(0) = r(0) = 0$ et $s(1) = 0 + r(1) = 1$, puis $s(2) = 1 + r(2)$, mais $r(2)$ n'est pas défini, donc $s(2)$ n'est pas défini, ni toutes les valeurs suivantes de s.

Exercice 2.

1. Décrire une machine de Turing calculant la fonction $n \mapsto 2n$.
2. Décrire une machine de Turing calculant la fonction $n \mapsto \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
3. Décrire une machine de Turing qui teste la relation de divisibilité.

Solution de l'exercice 2. Nous donnons ici une description de haut niveau du fonctionnement des machines. Il serait possible mais fastidieux de décrire leurs états et leur fonction de transition.

1. Une stratégie possible est que la tête de lecture aille jusqu'au bout de l'entrée, puis écrive en alternant des bâtons à gauche et à droite de cette position sur le ruban de sortie, jusqu'à retomber sur le symbole de début de bande
2. La stratégie est la suivante. On définit une machine à trois bandes qui commence par recopier le contenu de la première bande sur la 3ème bande. Ensuite, tant que la seconde bande n'est pas blanche, effacer les deux "1" finaux sur la 3ème puis ajouter un "1" au second ruban (s'il ne reste qu'un "1" sur la 3ème bande, l'effacer puis aller dans l'état final).
   Il est maintenant facile d'écrire la table de transition d'une machine de Turing calculant $n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$. En effet, on sait comparer deux nombres écrits en unaire sur deux bandes différentes, recopier une bande sur une autre, effacer une bande qui contient un nombre écrit en unaire, tester si une bande contient l'entier 0, ainsi qu'incrémenter et décrémenter une valeur écrite en unaire sur un ruban. Ces briques de base organisées selon l'algorithme décrit ci-dessus fournissent la description d'une machine de Turing calculant la fonction demandée.
3. Même méthode qu'à la question précédente.

Exercice 3. Soit f une fonction totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que f est une fonction récursive si et seulement si son graphe est récursif.

Solution de l'exercice 3. Soit G_f le graphe de f. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est récursive totale, alors $\chi_{G_f}(x, y) = R_=(y, f(x))$ est récursive comme composition de fonctions récursives et totale car f est totale. Réciproquement, si $\chi_{G_f}(x, y)$ est récursive alors $f(x) = \mu y((x, y) \in G_f)$ est récursive par minimisation sur un ensemble récursif.

Exercice 4. Est-il vrai qu'une fonction totale est récursive primitive si et seulement si son graphe est récursif primitif ?

Solution de l'exercice 4. Si une fonction est récursive primitive, son graphe est récursif primitif. En effet, $(x_1, \ldots, x_p, y)$ est dans le graphe de f ssi $f(x_1, \ldots, x_p) = y$.
La réciproque est fausse (comparer à l'exercice 3). Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ récursive totale mais non récursive primitive. Une telle fonction f existe, par exemple $f(z) = A(\beta_2^1(z), \beta_2^2(z))$ où A est la fonction d'Ackermann vue en cours.
Cette fonction f est calculée par machine de Turing : soit M une machine calculant f. Cette machine s'arrête sur toute entrée. Soit $t(x)$ le temps de calcul de M sur l'entrée x. Le graphe de t est récursif primitif. En effet, soit i l'indice de M : (x, y) est dans le graphe de t ssi $(i, y, x) \in B^1$, et on sait que B^1 est récursif primitif. Supposons maintenant que t est récursif primitif. Alors la fonction f le serait aussi (voir exercice 9), absurde.

Exercice 5.

1. Montrer que la fonction g définie par $g(n) = 1$ s'il existe une suite de n chiffres 7 consécutifs dans le développement de $\sqrt{2}$, $g(n) = \perp$ sinon est récursive.

2. La fonction h définie par $h(n) = 1$ si $g(n) = 1$ et $h(n) = 0$ sinon est-elle aussi récursive ?

Solution de l'exercice 5. On peut montrer que cette fonction est récursive en faisant une discussion : soit il existe dans le développement de $\sqrt{2}$ des suites de 7 de longueur arbitraire, auquel cas la fonction g demandée est la fonction constante 1 ; soit il existe un entier k qui est la longueur maximale d'une suite de 7 et la fonction g est la fonction valant 1 pour les entiers jusqu'à k et $\perp$ ensuite. dans les deux cas, la fonction g est récursive. Cette méthode fonctionne aussi pour h.
Autre méthode pour g : on utilise la fonction $f(m, i)$ (définie un exercice précédent) qui donne la i-ème décimale de $\sqrt{m}$. On a alors :
$g(n) = \begin{cases} 1 + 0 \cdot (\mu k \ (\forall i \leqslant n-1, f(2, k+i) = 7)) & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
Cette méthode ne fonctionne pas pour h.

Exercice 6.

1. Montrer que l'image d'une fonction à une variable totale récursive et croissante est un ensemble récursif.

2. Réciproquement, montrer que tout ensemble récursif infini est l'image d'une fonction récursive strictement croissante.

Solution de l'exercice 6.

1. Soit $f \in \mathcal{F}^1$ récursive, totale, croissante. Si $\operatorname{Im} f$ est fini, $\operatorname{Im} f$ est récursif primitif donc récursif. Si $\operatorname{Im} f$ est infini on pose : $\chi_{\operatorname{Im}(f)} = R_=(f(\mu x \ (f(x) \geqslant y)), y)$. La fonction $\chi_{\operatorname{Im}(f)}$ est la composée de fonctions récursives primitives et d'un schéma de minimisation appliqué à un ensemble récursif primitif. Donc $\chi_{\operatorname{Im}(f)}$ est récursive. On note en outre que comme f est totale $\chi_{\operatorname{Im}(f)}$ est totale également si la minimisation est définie, ce qui est le cas car $\operatorname{Im} f$ est infini. On vérifie que la fonction définie dans le membre de droite est bien la fonction caractéristique de $\operatorname{Im} f$:
   1. si le x renvoyé par la minimisation est tel que $f(x) = y$ alors $y \in \operatorname{Im} f$.
   2. si le x renvoyé par la minimisation est tel que $f(x) > y$ alors $\forall u < x, f(u) < y$ par définition de x et $\forall u \geqslant x, f(u) \geqslant f(x) > y$ car f est croissante, donc y n'est pas dans l'image de f.

2. Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ récursif et infini. On pose : $\begin{cases} f(0) & = min(E) \\ f(n+1) & = \mu x(x > f(n) \text{ et } x \in E) \end{cases}$
   Comme E est un ensemble récursif, f est une fonction récursive (schéma de récurrence et schéma μ). Comme E est infini, la fonction f est totale. La fonction f est strictement croissante. On vérifie facilement que $E = \operatorname{Im} f$.

Exercice 7. Soit f une fonction récursive totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ dont l'image est infinie. Montrer qu'il existe une fonction g, récursive totale, injective et ayant même image que f.

Solution de l'exercice 7. On commence par définir une fonction θ qui énumère les points où la fonction f prend une valeur "pour la première fois".
Soit θ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(n+1) = \mu k(k > \theta(n) \text{ et } \forall i < k, f(i) \neq f(k)) \end{cases}$$

Soit $E = \{e_i \mid i \in \mathbb{N} <\}$ l'ensemble des points où f prends une valeur pour la première fois, avec $e_i < e_{i+1}$ pour tout i. On montre facilement par récurrence que $\theta(i) = e_i$. Comme l'image de f est infinie, E est infini et la fonction θ est totale.
Soit $g = f \circ \theta$. La fonction g est récursive totale car f et θ sont récursives totales.
Montrons que g est injective : supposons $g(k) = g(k')$. On a $\theta(k) = \min\{x \mid f(x) = f(\theta(k))\}$ et $\theta(k') = \min\{x \mid f(x) = f(\theta(k'))\}$. On on déduit $\theta(k) = \theta(k')$ et comme θ strictement croissante donc injective, $k = k'$.
Il reste à montrer que f et g ont même image. Bien sûr $\operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$. Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. La fonction f prend cette valeur pour la première fois en un certain $e_i = \theta(i)$. On a donc $y = g(i)$. On en déduit $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 8. Soit f une fonction récursive. Soit $g(x)$ le plus petit $z \leqslant x$ tel que $f(z)$ diverge s'il existe un tel z, et $g(x)$ non définie sinon. La fonction g est-elle récursive ?

Solution de l'exercice 8. Si f est tout le temps définie, alors g est la fonctoin nulle-part définie. Sinon, soit t le plus petit entier pour lequel f n'est pas définie, $g(x)$ est alors non-définie jusqu'à $t-1$ et vaut t ensuite. Dans les deux cas g est une fonction récursive.

Exercice 9. Montrer que si f est une application de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ calculable par une machine de Turing dont le temps de calcul est une fonction récursive primitive de l'entrée $(x_1, \dots, x_p)$, alors f est récursive primitive.

Solution de l'exercice 9. On a vu que toute fonction calculée par une machine de Turing est récursive et est obtenue par une fonction récursive primitive appliquée aux arguments et au temps de calcul, donc f est récursive primitive si le temps de calcul l'est.

Exercice 10. Le schéma de minimisation totale est le schéma obtenu en appliquant le schéma de minimisation seulement dans le cas où il permet d'obtenir une fonction totale. Soit $\mathcal{E}$ le plus petit ensemble de fonctions contenant les fonctions récursives primitives et clos par composition et minimisation totale. Montrer que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions récursives totales.

Solution de l'exercice 10. Soit T l'ensemble des fonction récursives totales. Pour montrer que $\mathcal{E} = T$ nous allons montrer les deux inclusions. Il est clair que $\mathcal{E} \subseteq T$, car les fonctions récursives primitives sont totales et les schémas de composition et de minimisation totale n'introduisent pas de fonctions partielles.
Pour l'inclusion $T \subseteq \mathcal{E}$, il faut utiliser la preuve de l'équivalence entre fonctions récursives et fonctions calculables par machine de Turing. En effet, si f est une fonction totale récursive, elle est calculée par une machine de turing. L'expression de cette machine sous forme d'une fonction récursive ne fait intervenir que des compositions et des fonctions récursives primitives, à part au moment où on calcule le temps de calcul, où on utilise une minimisation. La fonction f étant totale cette minimisation est un schéma de minimisation totale et f appartient donc à $\mathcal{E}$.

Exercice 11. Dans cet exercice, nous considérons des machines de Turing avec les propriétés suivantes :

— Les machines ont deux rubans semi-infinis ;
— L'alphabet est $\{0, 1, \#\}$. Le symbole 0 est le symbole blanc et # est le symbole de début de bande (il n'apparaît que là).

On considère la fonction $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\alpha(n)$ est le maximum, sur toutes les machines de Turing comme ci-dessus à $n+1$ états, du nombre de 1 écrits au début de la seconde bande (avant le premier 0) à la fin du calcul, quand on lance cette machine sur l'entrée vide.

1. Montrer que α est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que pour tout n, il existe au moins une machine à $n+1$ états qui s'arrête sur l'entrée vide).
2. Montrer que α est strictement croissante.
3. On veut montrer que α n'est pas récursive. Dans la suite, on suppose par l'absurde qu'elle l'est. Montrer que, sous cette hypothèse, la fonction $\beta : n \mapsto \alpha(2n)$ est récursive totale.
4. Montrer qu'il exite une constante c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une machine à $n+c$ états qui, sur l'entrée vide, écrit $\underbrace{111\dots1}_{\beta(n)}$ sur le second ruban.
5. Conclure par l'absurde que α n'est pas récursive.

Exercice 12. Pour deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{N}$, on dit que A se réduit à B (ce qu'on note $A \leqslant B$) si il existe une fonction récursive totale f telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x \in A$ ssi $f(x) \in B$.

1. Montrer que si B est récursif et $A \leqslant B$, alors A est récursif.
2. Montrer que si B est récursivement énumérable et $A \leqslant B$, alors A est récursivement énumérable.

Solution de l'exercice 12.

1. On a $\chi_A = \chi_B \circ f$ donc si B est récursif, A l'est aussi.
2. Soit b une fonction récursive partielle de domaine B. La fonction $a = b \circ f$ a pour domaine A ce qui montre que A est récursivement énumérable.

Exercice 13. Soit A un ensemble récursivement énumérable. On pose

$$B = \bigcup_{a \in A} \mathrm{dom}(\varphi_a^1).$$

1. Montrer que $\{(a, x) \in \mathbb{N}^2 \mid a \in A \text{ et } \varphi_a^1(x) \text{ converge}\}$ est récursivement énumérable.
2. En déduire que B est récursivement énumérable.

Exercice 14. Montrer que tout ensemble infini récursivement énumérable contient un sous-ensemble récursif infini.

Solution de l'exercice 14. Soit A un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}$. Il est l'image d'une fonction RP f (cours). On définit par schéma de récurrence g : $g(0)$ est le plus petit élément de A ; $g(n+1) = f(\mu k\ (f(k) > g(n)))$, ce qui est toujours défini car A est infini. g est donc croissante et son image est un sous-ensemble de A. Par un résultat vu en TD, son image est récursive. Pour un sous-ensemble RE de $\mathbb{N}^p$, on se ramène au cas précédent via le codage α_p.

Exercice 15. Montrer que, si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sont deux ensembles récursivement énumérables tels que $A \cup B = \mathbb{N}$, alors il existe un ensemble récursif $R \subseteq \mathbb{N}$ tel que $R \subseteq A$ et $\mathbb{N} \setminus R \subseteq B$.

Solution de l'exercice 15. A et B sont tous deux récursivement énumérables, donc il existe deux machines de Turing M et N telles que les fonctions récursives qu'elles calculent prennent respectivement A et B comme domaine de définition. On fait tourner les deux machines M et N en parallèle sur une entrée x ; comme $A \cup B = \mathbb{N}$, on a toujours au moins une des deux machines M et N qui s'arrête sur x. Si c'est M qui s'arrête en premier (ou que les deux machines s'arrêtent en même temps), alors on accepte x (autrement dit on renvoie 1), dans le cas contraire on rejette x (c'est-à-dire qu'on renvoie 0).

Cela définit bien la fonction caractéristique d'un ensemble récursif car la machine ainsi obtenue s'arrête sur x, pour tout x appartenant à $\mathbb{N}$. Soit R cet ensemble.

Si $x \in R$, alors la machine s'est arrêtée et M s'était arrêtée en premier sur la donnée x. Donc M s'arrête sur x et $x \in A$. Donc $R \subseteq A$.
Si $x \in \bar{R}$, alors la machine s'arrête, et la machine M ne s'était pas (encore) arrêtée. Donc N s'arrête sur x et $x \in B$. Donc $\bar{R} \subseteq B$.

Voici une autre manière d'exprimer cette solution. Soit i un indice de A, j un indice de B (c'est-à-dire que $A = W_i^1$ et $B = W_j^1$). Alors on pose :

$$\chi_R(x) = \chi_{B^1}\Big(\ i,\ \mu t\ \big((i,t,x) \in B^1 \text{ ou } (j,t,x) \in B^1\big)\ ,\ x\ \Big).$$

Cette fonction caractéristique est clairement récursive car B^1 est un ensemble récursif primitif et la minimisation est une opération récursive. Elle est totale car $A \cup B = \mathbb{N}$. On a donc bien construit un ensemble récursif R tel que $R \subseteq A$ et $\bar{R} \subseteq B$.

Exercice 16. Soit φ^1 la fonction récursive partielle à 2 variables permettant d'énumérer les fonctions récursives partielles à 1 variable. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale f prolongeant la fonction g définie par $g(x) = \varphi^1(x,x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 16. Supposons qu'une telle fonction f existe. Alors elle a un indice i : $f = \varphi_i^1$. Mais alors $f(i) = \varphi_i^1(i)$ et cette valeur est donc définie car f est totale. Mais alors g est définie en i et vaut $\varphi_i^1(i) + 1$ et f devrait coïncider avec cette valuer, ce qui est une contradiction.

Exercice 17.

1. Montrer que tout sous-ensemble récursivement énumérable infini de $\mathbb{N}$ est l'image d'une fonction récursive totale injective.
2. Peut-on demander en plus que cette fonction soit récursive primitive ?

Solution de l'exercice 17.

1. On sait que tout ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}$ non vide est l'image d'une fonction récursive primitive. Un exercice déjà vu montre alors que, comme l'ensemble est infini, il est l'image d'une fonction récursive totale injective.
2. Rappelons quelques faits vus en cours sur la fonction d'Ackermann :
   — Pour tout n, x, $A(n,x) < A(n,x+1)$ et $A(n,x) \leqslant A(n+1,x)$;
   — Pour toute fonction f récursive primitive de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il existe n_0 telle que f est majorée par $A(n_0,\cdot)$ à partir d'un certain rang.
   Soit $I = \{A(x,x+1) \mid x \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble I est l'image d'une fonction récursive, c'est donc un ensemble récursivement énumérable. Comme $A(x,x+1) < A(x+1,x+2)$ pour tout x, l'ensemble I est infini.

Supposons que I est l'image d'une fonction injective θ. Pour une infinité de x, on a $\theta(x) \geqslant A(x, x+1)$ (car une fonction h injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie $h(n) \geqslant n$ pour une infinité d'entiers n ; il suffit d'appliquer ceci à $h = g^{-1} \circ \theta$ où g est définie par $g(x) = A(x, x+1)$).
Si on suppose en plus que θ est récursive primitive, elle est majorée à partir d'un certain rang B par $A(n_0, \cdot)$ pour un certain n_0. Soit $x > \max(B, n_0)$ tel que $\theta(x) \geqslant A(x, x+1)$. On a alors $A(x, x+1) \leqslant \theta(x) \leqslant A(n_0, x)$ ce qui est absurde (car $x \geqslant n_0$ et $x+1 > x$, et donc $A(x, x+1) > A(n_0, x)$).

Exercice 18. On rappelle que B^1 est l'ensemble des triplets (i, t, x) tels que la machine d'indice i fonctionnant sur l'entrée x s'arrête au temps t. On considère la fonction $t : x \mapsto \mu y \ ((x, y, x) \in B^1)$.

1. Montrer que la fonction t est récursive et qu'elle n'est pas totale.
2. Montrer que t ne peut pas être prolongée en une fonction récursive totale : il n'existe pas de fonction récursive totale f telle que t et f soient égales sur le domaine de définition de t.

Solution de l'exercice 18.

1. La fonction t est récursive car B^1 est récursif primitif (résultat du cours) et t est obtenue par minimisation. La fonction t n'est pas totale car il existe des entiers x pour lesquels $\varphi^1_x(x)$ n'est pas défini, ce qui veut dire que t ne sera pas définie (c'est le cas par exemple pour x un indice de la fonction définie nulle part).

2. Supposons que t soit prolongeable en une fonction totale f. Alors pour tester si un entier x appartient à $K = \{x \in \mathbb{N} |\ \varphi^1(x, x) \downarrow\}$ il suffit de tester si $(x, f(x), x)$ appartient à B^1. En effet, si x appartient à K, alors t est définie et donc f coïncide avec t, donc $(x, f(x), x)$ appartient à B^1. Par contre si x n'appartient pas à K, alors comme le calcul $\varphi^1_x(x)$ ne s'arrête jamais, $(x, f(x), x)$ n'appartient pas à B^1, quelle que soit la valeur que prend f en x.

Exercice 19. Si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sont deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont récursivement séparables s'il existe un ensemble récursif $R \subseteq \mathbb{N}$ tel que $A \subseteq R$ et $B \subseteq \bar{R}$.

1. Donner un exemple deux ensembles A et B récursivement séparables.
2. Soit A et B deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$. On suppose que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont récursivement énumérables. Montrer que A et B sont récursivement séparables.
3. Montrer qu'il existe deux ensembles récursivement inséparables.
4. On souhaite montrer qu'il existe deux ensembles récursivement énumérables mais inséparables. Considérer $A = \{i \in \mathbb{N} |\ \varphi^1_i(i) = 0\}$ et $B = \{i \in \mathbb{N} |\ \varphi^1_i(i) = 1\}$ et supposer que A et B sont récursivement séparables par un ensemble récursif R. Considérer un indice r de la fonction caractéristique de R pour arriver à une contradiction.

Solution de l'exercice 19.

1. Si A est récursif, alors A et $\bar{A}$ sont récursivement séparés par A. On peut aussi prendre $\{0\}$ et $\{1\}$.
2. Avec les hypothèses de la question, on a $\bar{A}$ et $\bar{B}$ récursivement énumérables et tels que $\bar{A} \cup \bar{B} = \mathbb{N}$. Le résultat demandé s'obtient alors en appliquant l'exercice 2 de la feuille 4.
3. Soit A un ensemble non récursif, alors A et $\bar{A}$ ne sont pas séparables, car cela impliquerait que A soit récursif.
4. Supposons d'abord que $r \in R$. Alors $\varphi^1_r(r) = 1$, donc $r \in B$, ce qui est impossible car B est inclus dans $\bar{R}$. Supposons maintenant que $r \notin R$. Alors $\varphi^1_r(r) = 0$, donc $r \in A$, ce qui est impossible car A est inclus dans R.

Exercice 20. Dans les cas suivants, donner un exemple d'ensemble A ou montrer qu'il n'en existe pas ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A) :

1. A est récursif et $\bar{A}$ est récursif.
2. A est récursif et $\bar{A}$ n'est pas récursif.
3. A est récursif et $\bar{A}$ est récursivement énumérable.
4. A est récursif et $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.
5. A est récursivement énumérable et $\bar{A}$ n'est pas récursif.
6. A est récursivement énumérable et $\bar{A}$ est récursivement énumérable.
7. A est récursivement énumérable et $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.
8. A n'est pas récursivement énumérable et $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.

Solution de l'exercice 20.

1. On peut prendre $A = \mathbb{N}$, qui est récursif primitif donc récursif ; et donc $\bar{A} = \emptyset$, qui est aussi récursif primitif.
2. Si A est récursif, alors $\bar{A}$ est récursif. Ce n'est donc pas possible.
3. On peut à nouveau prendre $A = \mathbb{N}$, qui est récursif primitif donc récursif ; et donc $\bar{A} = \emptyset$, qui est aussi récursif primitif donc récursivement énumérable.
4. Si A est récursif, alors $\bar{A}$ est récursif, donc récursivement énumérable. Ce n'est donc pas possible.
5. On peut prendre $A = K$, qui est bien récursivement énumérable, et dont le complémentaire $\bar{K}$ n'est pas récursif.
6. Si A et $\bar{A}$ sont récursivement énumérables alors A est récursif. Donc il suffit de poser $A = \mathbb{N}$, et alors $\bar{A} = \emptyset$.
7. On peut prendre à nouveau $A = K$, qui est bien récursivement énumérable, et dont le complémentaire $\bar{K}$ n'est pas récursivement énumérable.
8. Posons $A = 2K \cup (1 + 2\bar{K})$.
   Supposons que A récursivement énumérable. Sur une entrée x, on peut tester "en parallèle" les deux conditions $2x \in A$ et $2x + 1 \in A$. L'un des deux calculs termine (puisque $x \in K$ ou $x \in \bar{K}$). Ceci permet d'obtenir un algorithme de décision pour K, ce qui est absurde car cet ensemble n'est pas récursif.
   Si $\bar{A}$ est récursivement énumérable, on en déduit de même que K récursif en testant en parallèle les conditions $2x \in \bar{A}$ et $2x + 1 \in \bar{A}$.
   Ceci montre que ni A ni $\bar{A}$ ne sont récursivement énumérables.

Exercice 21. Exhiber un ensemble récursif $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que l'ensemble $A' = \{x \mid \forall y \in \mathbb{N}, (x, y) \in A\}$ ne soit pas récursivement énumérable.

Solution de l'exercice 21. Par définition de K, $i \in \bar{K}$ si et seulement si $\varphi_i^1(i)$ diverge, c'est-à-dire si et seulement si pour tout t la machine i sur l'entrée i ne s'arrête pas au temps t (ce qui s'écrit $(i, t, i) \in \bar{B}^1$). Posons $A = \{(i, t) \in \mathbb{N}^2 \mid (i, t, i) \in \bar{B}^1\}$. L'ensemble $A' = \{i \in \mathbb{N} | \ \forall t \in \mathbb{N}, (i, t) \in A\} = \bar{K}$ n'est pas récursivement énumérable alors que A est récursif car B^1 est récursif primitif.
Plus généralement, on peut prendre un ensemble récursivement énumérable X tel que $\bar{X}$ n'est pas récursivement énumérable. Alors X est la projection d'un ensemble récursif Y : $x \in X$ ssi il existe y tel que $(x, y) \in Y$. Donc $x \in \bar{X}$ ssi pour tout y, $(x, y) \in \bar{Y}$. $\bar{Y}$ est récursif mais $\bar{X}$ n'est pas récursivement énumérable.

Exercice 22. Montrer que le problème de déterminer sur l'entrée (x, y) si x appartient à l'image de φ_y^1 est indécidable.

Solution de l'exercice 22. Il s'agit donc de montrer que l'ensemble B des couples (x, y) tels que x appartient à l'image de φ_y^1 n'est pas récursif. Mais si cet ensemble était récursif, alors tout sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}$ serait récursif. En effet, soit A un ensemble récursivement énumérable. Si A est vide, A est récursif. Si A est non vide, alors A est l'image d'une fonction récursive f, d'indice i. On en déduit que $x \in A$ ssi $(x, i) \in B$, donc A est récursif si B l'est.

Exercice 23. Soit α une fonction récursive totale injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit A l'image de α. On pose :

$$B = \{x \mid \text{il existe } y > x \text{ tel que } \alpha(y) < \alpha(x)\}.$$

1. Montrer que B est récursivement énumérable et que son complémentaire est infini.
2. On suppose que le complémentaire de B contient un ensemble récursivement énumérable infini C. Montrer que A est récursif.

Solution de l'exercice 23.

1. B est récursivement énumérable car il s'écrit comme un projection (un quantificateur existentiel) devant un ensemble qui est récursivement énumérable (en fait récursif). Supposons que le complémentaire de B soit fini. Alors il existe x_0 tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, x appartient à B. C'est en particulier le cas de x_0, donc il existe $x_1 > x_0$ tel que $\alpha(x_1) < \alpha(x_0)$. x_1 étant plus grand que x_0, x_1 appartient à B et on peut recommencer. On construit ainsi une suite infinie d'entiers x_i qui est strictement croissante et telle que $\alpha(x_{i+1}) < \alpha(x_i)$. La suite des $\alpha(x_i)$ serait alors une suite d'entiers naturels infinie et strictement décroissante, ce qui est impossible.

2. On veut pouvoir tester si un entier x appartient à l'image de α. Si on peut trouver un entier $y \in \bar{B}$ tel que $\alpha(y) \geqslant x$ alors on pourra faire ce test. En effet, si $y \in \bar{B}$, alors pour tout $z > y$ on sait que $\alpha(z) > \alpha(y) \geqslant x$ et donc x ne peut être l'image d'un entier plus grand que y, ce qui nous laisse juste à tester les images des entiers jusqu'à y. Pour pouvoir trouver un tel y on va utiliser le fait que $\bar{B}$ contient un sous-ensemble récursivement énumérable infini C : celui-ci est alors l'image d'une fonction totale récursive f.
   Soit $b(x) = f(\mu k\ (\alpha(f(k)) \geqslant x))$. Cette fonction est totale car l'image de f (l'ensemble C) est infinie et elle renvoie une valeur y comme celle souhaitée par la discussion ci-dessus. On peut alors montrer que A est récursif : $x \in A$ ssi $\exists u \leqslant b(x)\ (\alpha(u) = x)$.

Exercice 24. Montrer qu'il existe $A \subset \mathbb{N}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
— le complémentaire de A est infini ;
— A intersecte tout ensemble récursivement énumérable infini.