TD 3 – Théorème s-m-n, théorèmes de Rice et de point fixe

Exercice 1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ soit un indice de la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$.

Solution de l'exercice 1. On considère la fonction $u : (n, x) \mapsto \lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$. Cette fonction est récursive car elle s'exprime par $u(n, x) = \mu k \ ((k+1)^n > x)$. Elle a donc un indice $i : u = \varphi_i^2$. Pour tout n fixé, la fonction $x \mapsto u(n, x)$ est la fonction qui calcule la partie entière de la racine n-ième. Le théorème s-m-n nous dit qu'un indice de cette fonction peut être obtenu de manière récursive primitive à partir de i et n : $s_1^1(i, n)$ est un indice de cette fonction. Donc on peut poser $f(n) = s_1^1(i, n)$ pour obtenir la fonction demandée par l'énoncé.

Exercice 2.

1. Quel est le sens intuitif des résultats dont on demande la preuve dans les questions suivantes ?
2. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive c telle que, pour tout i, si φ_i^1 est la fonction caractéristique d'un ensemble A, alors $\varphi_{c(i)}^1$ est la fonction caractéristique de $\bar{A}$.
3. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive a telle que, pour tous i et j, l'ensemble de définition de $\varphi_{a(i,j)}^1$ est l'intersection des ensembles de définition de φ_i^1 et de φ_j^1.
4. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive b telle que, pour tous i et j, l'ensemble de définition de $\varphi_{b(i,j)}^1$ est l'union des ensembles de définition de φ_i^1 et de φ_j^1.

Solution de l'exercice 2.

1. Si un ensemble est récursif alors son complémentaire l'est aussi. La question 2 montre que si on désigne les ensembles récursifs par un indice de leur fonction caractéristique, alors l'opération de passage au complémentaire est calculable récursivement. De même, on sait que si deux ensembles sont récursivement énumérables, alors leur union et leur intersection sont aussi récursivement énumérables. Les questions 3 et 4 montrent que si on désigne les ensembles récursivement énumérables par un indice d'une fonction récursive dont ils sont l'ensemble de définition, alors les opérations d'union et d'intersection sont calculables récursivement.
2. Considérons la fonction $\psi : (i, x) \mapsto (1 - \varphi^1(i, x))$. Si i est fixé et si φ_i^1 est la fonction caractéristique d'un ensemble, alors clairement la fonction $x \mapsto \psi(i, x)$ est la fonction caractéristique du complémentaire. La fonction ψ est récursive, donc elle a un indice k. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème s-m-n pour voir qu'un indice de la fonction $x \mapsto \psi(i, x)$ peut être calculée à partir de k et i par la fonction s_1^1 : on pose donc $c(i) = s_1^1(k, i)$.
3. Considérons la fonction $\psi : (i, j, x) \mapsto \varphi^1(i, x) + \varphi^1(j, x)$. C'est une fonction récursive d'indice k. De plus, pour i, j fixés, x appartient au domaine de définition de la fonction $x \mapsto \psi(i, j, x)$ ssi x appartient à l'intersection des domaines de définition de φ_i^1 et φ_j^1. Or, par le théorème s-m-n, un indice de cette fonction est calculable à partir de k et (i, j) par la fonction s_2^1 : on peut poser $a(i, j) = s_2^1(k, i, j)$ pour obtenir une fonction satisfaisant l'énoncé.
4. Considérons la fonction $\psi(i, j, x) \mapsto \mu t \ \big((i, t, x) \in B^1 \text{ ou } (j, t, x) \in B^1\big)$. C'est une fonction récursive d'indice k. De plus, pour i, j fixés, x appartient au domaine de définition de la fonction $x \mapsto \psi(i, j, x)$ ssi x appartient à l'union des domaines de définition de φ_i^1 et φ_j^1. En effet, la fonction cherche un temps de calcul tel que le calcul de φ_i^1 ou le calcul de φ_j^1 se soit arrêté, ce qui existe ssi x est dans l'union des domaines de définition des fonctions correspondantes. Or, par le théorème s-m-n, un indice de cette fonction est calculable à partir de k et (i, j) par la fonction s_2^1 : on pose $b(i, j) = s_2^1(k, i, j)$ pour obtenir une fonction satisfaisant l'énoncé.

Exercice 3.

1. Soit
$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{dom}\,(\varphi_i^1) \cap (3\mathbb{N}) \neq \emptyset\}.$$
L'ensemble A est-il récursif ?
2. Montrer que A est récursivement énumérable.
3. L'ensemble $\mathbb{N} \setminus A$ est-il récursivement énumérable ?

Solution de l'exercice 3.

1. Théorème de Rice : X est l'ensemble des fonctions récursives dont le domaine de définition contient un multiple de 3 ; la fonction nulle part définie n'est pas dans X, mais la fonction identité y est, donc A n'est pas récursif.
2. $i \in A$ ssi il existe un entier k tel que $\varphi_i^1(3k)$ est défini, ssi il existe un entier k et un temps t tel que la machine i sur l'entrée k est à l'arrêt au temps t, ssi $\exists m.(i, \beta_2^1(m), 3\beta_2^2(m)) \in B^1$. Donc A est récursivement éumérable par projection d'un ensemble récursif.
3. Le complémentaire de A ne peut donc pas être RE sinon A serait récursif.

Exercice 4.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive f telle que pour tout $x, n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{f(n)}^1(x) = nx$.
2. En déduire qu'il existe un entier n tel que φ_n^1 est la fonction $x \mapsto nx$.

Solution de l'exercice 4.

1. On considère la fonction $g(n, x) = nx$. Elle est récursive et a donc un indice i. On a alors : $g(n, x) = \varphi^2(i, n, x) = \varphi^1(s_1^1(i, n), x)$, donc $f(n) = s_1^1(i, n)$ est un indice de la fonction $x \mapsto nx$.
2. Par application du théorème du point fixe, il existe un tel entier n.

Exercice 5.

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1 \text{ n'est pas injective}\}$. Montrer que A n'est pas récursif.
2. Montrer que A est récursivement énumérable.
3. Que pouvez-vous dire de $\bar{A}$?

Solution de l'exercice 5.

1. Application de Rice, il existe au moins une fonction récursive injective (l'identité) et une fonction récursive non-injective (la fonction constante nulle), donc l'ensemble A n'est pas trivial.
2. $i \in A$ ssi $\exists x, y, t, u, z$ tels que la machine i sur l'entrée x au temps t est à l'arrêt et aussi sur l'entrée y au temps u et dans les deux cas la valeur sur le ruban de sortie est z. A est donc projection d'un ensemble récursif (primitif), et est bien récursivement énumérable.
3. $\bar{A}$ ne peut donc pas être récursivement énumérable.

Exercice 6. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout n, l'ensemble de définition de $\varphi_{\alpha(n)}^1$ est $\{1, n, n^2, n^3, \dots\}$.

Solution de l'exercice 6. On considère la fonction $\psi(n, x) = \mu k.\ n^k = x$. C'est une fonction récursive de deux variables, elle a donc un indice i. Pour n fixé, la fonction $x \mapsto \psi(n, x)$ a pour domaine de définition $\{1, n, n^2, n^3, \dots\}$. On a alors $\psi(n, x) = \varphi_i^2(n, x) = \varphi_{s_1^1(i,n)}^1(x)$ et il suffit de poser $\alpha(n) = s_1^1(i, n)$

Exercice 7.

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{le domaine de } \varphi_x^1 \text{ est un ensemble récursif}\}$. Montrer que A n'est pas récursif.
2. A est-il récursivement énumérable ?
3. Soit $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{le domaine de } \varphi_x^1 \text{ est un ensemble récursivement énumérable}\}$. Que peut-on dire de B ?

Solution de l'exercice 7.

1. Application de Rice, il existe au moins une fonction dont le domaine de définition est un ensemble récursif (l'identité) et une fonction dont le domaine n'est pas récursif (la fonction $x \mapsto \varphi_x^1(x)$), donc l'ensemble A n'est pas trivial.
2. En utilisant la preuve du théorème de Rice, on voit que A contient les indices de la fonction nulle-part définie, donc A n'est pas récursivement énumérable.
3. $B = \mathbb{N}$.

Exercice 8.

1. Montrer que $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} \varphi_i^1 = \{0\} \text{ ou } \operatorname{Im} \varphi_i^1 = \emptyset\}$ n'est pas récursif.
2. A est-il récursivement énumérable ? Même question pour $\bar{A}$.
3. Montrer que $B_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1(x) = 0\}$ n'est pas récursif.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $B_k = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1(x) = k\}$ n'est pas récursif.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi^2_x(y) = k\}$ n'est pas récursif.

Solution de l'exercice 8.

1. Par le théorème de Rice, en posant X l'ensemble des fonctions récursives dont l'image est vide ou réduite à $\{0\}$, qui contient la fonction nulle-part définie mais pas la fonction identité.
2. La preuve du théorème de Rice nous montre que A n'est pas RE (A contient les indices de la fonction nulle-part définie). $\bar{A}$ est RE, car $i \in \bar{A}$ ssi il existe x, k, t tels que la machine i sur l'entrée x est à l'arrêt au temps t avec résultat $k + 1$, ssi $\exists m.(i, \beta^1_3(m), \beta^2_3(m), \beta^3_3(m) + 1) \in C^1$, donc $\bar{A}$ est projection d'un ensemble récursif.
3. Si B_0 est récursif, alors sa fonction caractéristique $c(x)$ a un indice i. On a alors $i \in B_0$ ssi $c(i) = 1$ ssi $\varphi_i(i) = 1$ par définition de la fonction caractéristique, mais aussi $i \in B_0$ ssi $\varphi_i(i) = 0$ par définition de l'ensemble B_0, ce qui est impossible.
4. On a le résultat pour $k = 0$. Pour $k \geqslant 1$,on va réduire B_0 à B_k. On considère la fonction $g(x, y) = \varphi^1_x(x) + k$. Elle est récursive et a un indice i, donc $g(x, y) = \varphi^2(i, x, y) = \varphi^1(s^1_1(i, x), y)$. Donc pour chaque x, $f(x) = s^1_1(i, x)$ est un indice de la fonction $y \mapsto \varphi^1_x(x) - +k$. Or si $x \in B_0$, cette fonction est la fonction constante valant k, et donc $\varphi^1_{f(x)}(f(x)) = k$, et si $x \notin B_k$, cette fonction prend une valeur constante différente de k et $\varphi^1_{f(x)}(f(x)) \neq k$. f est donc une réduction de B_0 à B_k et B_k ne peut pas être récursif.
5. Par réduction de B_k à C_k : $x \in B_k$ ssi $(x, x) \in C_k$.

Exercice 9. Soit g, k dans $\mathcal{F}^*_1$ et h dans $\mathcal{F}^*_4$ des fonctions.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que pour tous x, y :

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) \\ f(x, 1) &= k(x) \\ f(x, y + 2) &= h(x, y, f(x, y + 1), f(x, y)) \end{aligned}$$

2. Montrer que si g, k et h sont récursives, alors f est récursive :
   a) en utilisant un codage,
   b) en utilisant un théorème de point fixe.

Solution de l'exercice 9.

1. Preuve par récurrence.
2. a) f est alors définie par récurrence à partir des deux valeurs précédentes, et on peut faire un codage α_2 de deux valeurs succesives de f pour appliquer un vrai schéma de récurrence comme dans un TD précédent.
   b) On va définir une opération $*$ sur les fonctions de deux variables. Si ψ est une fonction de deux variables, alors on définit ψ^* par :

$$\begin{aligned} \psi^*(x, y) &= g(x) \text{ si } y = 0 \\ &= k(x) \text{ si } y = 1 \\ &= h(x, y - 2, \psi(x, y - 1), \psi(x, y - 2)) \text{ sinon} \end{aligned}$$

   On remarque que f est l'unique point fixe de cette opération. Par ailleurs, si ψ est récusrive, alors ψ^* aussi. Nous allons donc utiliser le théorème s-m-n pour calculer un indice de ψ^* à partir d'un indice de ψ. Considérons donc la fonction :

$$\begin{aligned} g(i, x, y) &= g(x) \text{ si } y = 0 \\ &= k(x) \text{ si } y = 1 \\ &= h(x, y - 2, \varphi^2_i(x, y - 1), \varphi^2_i(x, y - 2)) \text{ sinon} \end{aligned}$$

   Elle est récursive et a un indice j, donc $g(i, x, y) = \varphi^3(j, i, x, y) = \varphi^2(s^2_1(j, i), x, y)$ par s-m-n. Donc $a(i) = s^2_1(j, i)$ est un indice de $(\varphi^2_1)^*$. Par le théorème du point fixe, il existe i tel que $\varphi^2_i = \varphi^2_{a(i)} = (\varphi^2_i)^*$. Donc φ^2_i est un point fixe pour l'opération $*$, c'est donc la fonction f, celle-ci est donc récursive.

Exercice 10. Soit f une fonction récursive à une variable. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive α telle que, pour tout i, l'ensemble de définition de $\varphi^1_{\alpha(i)}$ soit égal à l'image réciproque par f de l'ensemble de définition de φ^1_i.

Solution de l'exercice 10. Considérons la fonction $\psi : (i,x) \mapsto \varphi_i^1(f(x))$. Pour i fixé, la fonction $x \mapsto \psi(i,x)$ est définie pour les x tels que $f(x)$ soit dans l'ensemble de définition de φ_i^1. L'ensemble de défintion de $x \mapsto \psi(i,x)$ est donc l'image réciproque par f de l'ensemble de défintion de φ_i^1.
Pour obtenir la fonction α demandée par l'énoncé il suffit d'utiliser le théorème s-m-n. Soit k un indice de la fonction ψ. Alors un indice de la fonction $x \mapsto \psi(i,x)$ peut-être calculé à partir de k et i : on pose $\alpha(i) = s_1^1(k,i)$.

Exercice 11.

1. Montrer que la propriété pour une fonction récursive (partielle) d'être de domaine fini n'est pas décidable.

2. Pour la question précédente, l'ensemble des indices correspondant est-il récursivement énumérable ? Et son complémentaire ?

Solution de l'exercice 11.

1. Si X est l'ensemble des fonctions récursives de domaine fini, X est un ensemble de fonctions récursives, non vide, car contenant la fonction définie nulle part, et différent de l'ensemble de toutes les fonctions récursives à une variable, car contenant la fonction constante nulle. Si A_X est l'ensemble des indices des fonctions dans X, alors d'après le théorème de Rice A_X n'est pas récursif. Donc la propriété d'être de domaine fini est indécidable.
2. Cf. exerice 15.

Exercice 12. Montrer que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i^1$ est soit récursive primitive, soit non totale$\}$ n'est pas récursif.

Solution de l'exercice 12. On souhaite appliquer le théorème de Rice. L'ensemble d'indices considéré est non vide car il contient les indices des fonctions récursives primitives. Il est différent de $\mathbb{N}$ tout entier car il ne contient pas les indices de la fonction $x \mapsto A(\beta_2^1(x), \beta_2^2(x))$, où A est la fonction d'Ackermann. L'ensemble d'indices considéré correspondant à un ensemble de fonctions non trivial, il n'est pas récursif.

Exercice 13. Soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i^1$ est totale$\}$ et $A_0 = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i^1$ est définie en $0\}$.

1. Montrer que A n'est pas récursivement énumérable. (Supposer que A est récursivement énumérable. C'est donc l'image d'une fonction récursive totale f. Considérer alors la fonction $g : x \mapsto \varphi_{f(x)}^1(x) + 1$.)
2. Montrer que A_0 est récursivement énumérable.
3. Montrer que $\bar{A}_0$ n'est pas récursivement énumérable.
4. Trouver une fonction récursive totale α telle que $i \in A_0$ ssi $\alpha(i) \in A$.
5. En déduire que $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.

Solution de l'exercice 13.

1. Si A était récursivement énumérable, A serait l'image d'une fonction récursive totale f. Considérons alors la fonction $g : x \mapsto \varphi_{f(x)}^1(x) + 1$. Cette fonction est totale car l'image de f est l'ensemble des indices des fonctions récursives totales. Donc g a un indice i qui a un antécédent j par f. Alors $g(j) = \varphi_i(j) = \varphi_{f(j)}(j)$ car i est un indice de g. Mais la définition de g nous donne $g(j) = \varphi_{f(j)}^1(j) + 1$, contradiction.
2. A_0 est l'ensemble de définition de la fonction $i \mapsto \varphi^1(i,0)$ et est donc récursivement énumérable.
3. A_0 est un ensemble d'indices de fonctions récursives qui est non vide (car il contient les indices de la fonction identité) et qui est différent de $\mathbb{N}$ (car il ne contient pas les indices de la fonction nulle part définie). Par le théorème de Rice il n'est donc pas récursif. A_0 étant récursivement énumérable, $\bar{A}_0$ ne peut pas l'être, car sinon A_0 serait récursif.
4. Considérons la fonction $u : (i,x) \mapsto \varphi^1(i,0)$. Cette fonction et récursive. De plus, pour i fixé on a : si i appartient à A_0, alors la fonction $x \mapsto u(i,x)$ est totale ; si i n'appartient pas à A_0, alors la fonction $x \mapsto u(i,x)$ est la fonction nulle part définie. Par ailleurs le théorème s-m-n nous dit qu'un indice de la fonction $x \mapsto u(i,x)$ est calculable à partir de i et d'un indice k de u via la fonction s_1^1. On pose donc $\alpha(i) = s_1^1(k,i)$ pour obtenir la fonction demandée par l'énoncé.
5. Supposons que A est récursivement énumérable. C'est donc le domaine d'une fonction récursive partielle f. Le domaine de la fonction récursive partielle est $f \circ \alpha$ est A_0 : en effet, $f(\alpha(i))$ défini ssi $\alpha(i) \in A$, ce qui est équivalent à $i \in A_0$ d'après la question précédente. C'est absurde car $\bar{A}_0$ n'est pas récursivement énumérable.
   On a donc un exemple d'un ensemble qui n'est pas récursivement énumérable et dont le complémentaire ne l'est pas non plus.

Exercice 14. Soit A l'ensemble des entiers n tels que le domaine de définition de φ_n^1 est inclus dans l'ensemble des entiers pairs.

1. Montrer que A n'est pas récursif.
2. Est-ce que A est récursivement énumérable ? Est-ce que le complémentaire de A l'est ?
3. Mêmes questions pour l'ensemble A' des entiers n tels que le domaine de définition de φ_n^1 soit égal à l'ensemble des entiers pairs.

Solution de l'exercice 14.

1. Soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{dom } (\varphi_i^1) \subseteq 2\mathbb{N}\}$. On applique le théoréme de Rice a A qui est un sous-ensemble d'indices de fonctions récursives. L'ensemble des fonctions récursives dont le domaine de définition est inclus dans les entiers pairs est :
   — non vide : il contient la fonction vide.
   — different de l'ensemble des fonctions récursives : il ne contient pas la fonction constante nulle.
   Donc en appliquant le théoréme de Rice, l'ensemble A n'est pas récursif.
2. *1re solution :* On veut une fonction f qui s'arréte si et seulement si φ_i^1 est defini sur un entier impair. On considère une fonction qui cherche « simultanément » un temps de calcul et un entier impair tel que la machine correspondant à φ_i^1 est dans l'état d'arrêt : $f(i) = \mu k \ ((i, \beta_2^1(k), 2\beta_2^2(k)+1) \in B^1)$. Cette fonction f est définie en i ssi φ_i^1 est définie sur au moins entier impair. $\bar{A}$ est donc récursivement énumérable.
   2esolution : On peut écrire $\bar{A} = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists k \exists t \ (i, t, 2k+1) \in B^1\}$. $\bar{A}$ est donc la projection d'un ensemble récursif, il est donc récursivement énumérable.
   Pour finir, A n'est pas récursivement énumérable car $\bar{A}$ est récursivement énumérable et A n'est pas récursif.
3. Soit $A' = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{dom } (\varphi_i^1) = 2\mathbb{N}\}$. Alors $\bar{A}'$ est l'ensemble des entiers i tels que φ_i^1 est non définie pour au moins un entier pair ou définie sur au moins un entier impair. On applique le théoréme de Rice à A' qui est un sous-emsemble d'indices de fonctions récursives. L'ensemble des fonctions récursives dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers pairs est :
   — non vide : il contient la fonction $x \to \mu k \ (2k = x)$.
   — different de l'eensemble des fonctions récursivea car il ne contient pas la fonction constante nulle.
   Donc en appliquant le théorème de Rice, A' n'est pas récursif.
   On cherche une réduction de $\bar{K}$ à A' et de $\bar{K}$ à $\bar{A}'$. On cherche une fonction telle que $i \in \bar{K}$ si et si seulement dom $(\varphi_i^1) = 2\mathbb{N}$. On pose :
   $$g(i,x) = \begin{cases} \varphi_i^1(i) & \text{si } x \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } x \text{ est pair.} \end{cases}$$
   Pour $i \in \bar{K}$, la fonction $x \mapsto g(i,x)$ est définie exactement sur les entiers pairs et donc apparient à A. Pour $i \notin \bar{K}$, la fonction $x \mapsto g(i,x)$ est définie partout et donc n'appartient pas à A. Donc la fonction qui à i associe un indice de $x \mapsto g(i,x)$ est une réduction de $\bar{K}$ à A'. Pour obtenir cette fonction, il suffit d'utiliser le théorème s-m-n. g est une fonction récursive à deux variables donc elle a un indice a : $g(i,x) = \varphi_a^2(i,x) = \varphi_{s_1^1(a,i)}^1(x)$. La fonction $i \to s_1^1(a,i)$ est alors une reduction de $\bar{K}$ à A'. On procède de la même manière pour réduire $\bar{K}$ à $\bar{A}'$. On considère la fonction suivante :
   $$h(i,x) = \begin{cases} \varphi_i^1(i) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$
   Si $i \in \bar{K}$, $\varphi_i^1(i)$ n'est pas définie et $x \to g(i,x)$ est égale à la fonction vide qui appartient à $\bar{A}'$. Si $i \notin \bar{K}$, φ_i^1(i) est bien definie et $x \to g(i,x)$ est une fonction définie exactement sur les entiers pairs et qui n'appartient donc pas à $\bar{A}'$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème s-m-n pour obtenir une réduction de $\bar{K}$ à $\bar{A}'$.
   Ces deux réductions montrent que ni A' ni son complémentaire ne sont récursivement énumérables.

Exercice 15. Soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i^1 \text{ est totale}\}$ et $B = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i^1 \text{ est de domaine de définition infini}\}$.

1. Trouver une fonction récursive totale β telle que :
   a) si φ_i^1 est totale, alors $\varphi_{\beta(i)}^1$ est totale.
   b) si φ_i^1 n'est pas totale, alors $\varphi_{\beta(i)}^1$ est de domaine fini.
2. En déduire que B n'est pas récursivement énumérable, et que son complémentaire ne l'est pas non plus.

Solution de l'exercice 15.

1. On considère la fonction $h(i,x) = \sum_{k=0}^{x} \varphi^1(i,k)$. Pour i fixé, la fonction $x \mapsto h(i,x)$ est de domaine infini ssi la fonction φ_i^1 est totale. En effet, si φ_i^1 est totale, $x \mapsto h(i,x)$ est bien totale aussi. Si φ_i^1 n'est pas totale, $x \to h(i,x)$ n'est plus définie après la première valeur en laquelle φ_i^1 n'est pas définie, $x \mapsto h(i,x)$ est donc de domaine fini. Pour obtenir la réduction demandée par l'énoncée, on utilise le théorème s-m-n : h est récursive, donc elle possède un indice a et on peut écrire $h(i,x) = \varphi_a^2(i,x) = \varphi^1_{s_1^1(a,i)}(x)$. Donc $i \mapsto s_1^1(a,i)$ est une réduction de A à B.
2. D'après l'exercice 5, A et $\bar{A}$ ne sont pas récursivement énumérables. Donc à cause de la réduction de A vers B, B et $\bar{B}$ ne sont pas récursivement énumérables non plus.

Exercice 16. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas récursifs :

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1 \text{ est totale et constante}\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1(x) = 0\}$.
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi_x(y) = 0\}$.

Solution de l'exercice 16.

1. Il s'agit d'une application du théorème de Rice. L'ensemble A considéré est un ensemble d'indices associé à un ensemble de fonctions qui n'est pas vide (car il contient la fonction constante nulle) et qui n'est pas l'ensemble de toutes les fonctions récursives primitives à une variable (car il ne contient pas la fonction identité). Donc l'ensemble des indices, A, n'est pas récursif.
2. Attention, ce n'est pas une application directe du théorème de Rice car B n'est pas un ensemble d'indices de fonctions ! On peut réduire K à B. Considérons la fonction $u : (x,y) \mapsto \varphi^1(x,x) - \varphi^1(x,x)$. Soit x fixé. Si $x \in K$, la fonction $y \mapsto u(x,y)$ est la fonction constante nulle ; si $x \notin K$, cette fonction est la fonction nulle part définie. Soit k un indice de la fonction u, par le théorème s-m-n, $s_1^1(k,x)$ est un indice de la fonction $y \mapsto u(x,y)$ et la fonction $x \mapsto s_1^1(k,x)$ est alors une réduction de K à B, qui n'est pas récursif.
3. Si C était récursif, alors B le serait aussi car $x \in B$ ssi $(x,x) \in C$.

Exercice 17. Soit α et g dans $\mathcal{F}_1^*$ et h dans $\mathcal{F}_3^*$ des fonctions récursives. Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que pour tous x, y :

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ f(x,y+1) &= h(x,y,f(\alpha(x),y)) \end{aligned}$$

Montrer aussi que f est récursive.

Solution de l'exercice 17. L'existence et l'unicité de la fonction f se montrent par récurrence sur y, en supposant $f(x,t)$ définit pour tous x et $t \leqslant y$ on peut définir $f(x, y+1$ pour tout x.
On va définir une opération $*$ sur les fonctions de deux variables. Si ψ est une fonction de deux variables, alors on définit ψ^* par :

$$\begin{aligned} \psi^*(x,y) &= g(x) \text{ si } y = 0 \\ &= h(x, y-1, \psi(\alpha(x), y-1)) \text{ sinon} \end{aligned}$$

On remarque que f est l'unique point fixe de cette opération. Par ailleurs, si ψ est récusrive, alors ψ^* aussi. Nous allons donc utiliser le théorème s-m-n pour calculer un indice de ψ^* à partir d'un indice de ψ. Considérons donc la fonction :

$$\begin{aligned} g(i,x,y) &= g(x) \text{ si } y = 0 \\ &= h(x, y-1, \varphi_i^2(\alpha(x), y-1)) \text{ sinon} \end{aligned}$$

Elle est récursive et a un indice j, donc $g(i,x,y) = \varphi^3(j,i,x,y) = \varphi^2(s_1^2(j,i),x,y)$ par s-m-n. Donc $a(i) = s_1^2(j,i)$ est un indice de $(\varphi_1^2)^*$. Par le théorème du point fixe, il existe i tel que $\varphi_i^2 = \varphi_{a(i)}^2 = (\varphi_i^2)^*$. Donc φ_i^2 est un point fixe pour l'opération $*$, c'est donc la fonction f, celle-ci est donc récursive.