TD 3 - Calcul propositionnel

On fixe un ensemble $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$, où les p_i sont des *variables propositionnelles* (elles prennent comme valeurs « vrai » ou « faux »).
Les *formules du calcul propositionnel* sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{P} \cup \{\neg, \top, \bot, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow, (,)\}$, formés selon les règles (inductives) suivantes :
- p_i est une formule pour tout i,
- $\bot$ et $\top$ sont des formules ;
- si F et G sont des formules, alors $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ et $(F \Rightarrow G)$ aussi.

Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel. On identifie 0 avec « faux » et 1 avec « vrai ». Une *distribution de valeurs de vérité (d.v.v.)* est une application $\delta : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$. Par induction sur la construction de F, on définit $\delta \models F$, lu δ *est modèle de* F ou F *est satisfaite par* δ, comme suit :
- pour $p_i \in \mathcal{P}$, on pose $\delta \models p_i$ ssi $\delta(p_i) = 1$;
- $\delta \models \top$ et $\delta \not\models \bot$
- $\delta \models \neg F$ ssi $\delta \not\models F$;
- $\delta \models (F \wedge G)$ ssi $\delta \models F$ et $\delta \models G$;
- on procède de manière analogue pour $(F \vee G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ et $(F \Rightarrow G)$, en utilisant les tables de vérité des connecteurs binaires $\vee, \Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$.

On écrit $F = F(q_1, \ldots, q_n)$ si les q_i sont des variables distinctes et si toutes les variables ayant une occurrence dans F figurent parmi les q_i.
Une *tautologie (du calcul propositionnel)* est une formule $F \in \mathcal{P}$ telle que $\delta \models F$ pour toute d.v.v. δ.
Deux formules F et G sont *(logiquement) équivalentes* si $(F \Leftrightarrow G)$ est une tautologie.

Exercice 1. Tautologies.
Soient M, N et L des formules propositionnelles. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :
- $F_1 = M \Rightarrow (N \Rightarrow M)$
- $F_2 = ((M \Rightarrow N) \Rightarrow M) \Rightarrow M$
- $F_3 = (M \Rightarrow N) \Rightarrow ((M \Rightarrow (N \Rightarrow L)) \Rightarrow (M \Rightarrow L))$
- $F_4 = (\neg M \Rightarrow \neg N) \Rightarrow (N \Rightarrow M)$

Exercice 2. Formules à équivalence près.
1. Donner une liste complète des formules $F(p_0, p_1)$ à équivalence près.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des formules en les variables propositionnelles $p_0, \ldots, p_{n-1}$ à équivalence près.

Solution de l'exercice 2.
On va répondre aux deux questions simultanément.
Il faut commencer par remarquer que le fait qu'une formule soit satisfaite ou non par une d.v.v. ne dépend que de la restriction de la d.v.v. à l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans la formule. Ainsi des formules de la forme $F(p_0, ..., p_{n-1})$ sont équivalentes ssi elles sont satisfaites par le même ensemble de d.v.v sur $\{p_0, ..., p_{n-1}\}$.
L'ensemble de telles d.v.v. s'identifie naturellement à $\{0, 1\}^n$. Considérons l'application $\Phi : F(p_0, ..., p_{n-1}) \mapsto \{\delta \in \{0, 1\}^n : \delta \models F\}$. Par définition, Φ passe au quotient en une application qui à une classe d'équivalence de formules associe l'ensemble des d.v.v. les satisfaisant.
Par ce qui vient d'être dit, Φ est une injection. On a donc au plus $|\mathcal{P}(\{\text{d.v.v. sur } \{p_0, ..., p_{n-1}\}| = 2^{2^n}$ formules à équivalence près.
Montrons que Φ est surjective, ce qui revient à donner une liste des formules propositionnelles à équivalence près et montrera qu'il y en a bien exactement 2^{2^n}. On commence par construire, pour une

d.v.v. δ, une formule F_δ satisfaite uniquement par δ. Pour $\epsilon \in \{0,1\}$ on pose

$$p_i^\epsilon = \begin{cases} p_i & \text{si } \epsilon = 1 \\ \neg p_i & \text{si } \epsilon = 0 \end{cases} .$$

Par construction $\delta \models p_i^{\delta(p_i)}$ et si $\delta'(p_i) \neq \delta(p_i)$ alors $\delta \not\models p_i^{\delta(p_i)}$. On pose $F_\delta = \bigwedge_{i=0}^{n-1} p_i^{\delta(p_i)}$. On vérifie aisément que F_δ est satisfaite uniquement par δ. Alors étant donné un sous ensemble A de l'ensemble des d.v.v on pose $F_A = \bigvee_{\delta\in A} F_\delta$, par construction F_A est satisfaite exactement par les élements de A, ce qui montre que Φ est surjective.
En faisant la liste des parties A de $\{0,1\}^{\{p_0,p_1\}}$ et en écrivant les F_A correspondantes, on obtient la liste demandée à la question 1.

Exercice 3. Forme normale disjonctive / conjonctive.
Soit F une formule propositionnelle.

1. Montrer que F est équivalente à une formule de la forme

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{ij},$$

   où L_{ij} est égale à p ou à $\neg p$, pour $p \in \mathcal{P}$. On l'appelle une *forme normale disjonctive* de F. On pourra s'appuyer sur l'exercice précédent.

2. Montrer que F est équivalente à une formule de la forme $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij}$, où L_{ij} est égale à p ou à $\neg p$, pour $p \in \mathcal{P}$. On l'appelle une *forme normale conjonctive* de F.

Solution de l'exercice 3.

1. Découle de la question 2 de l'exercice précédent.
2. Découle de la question précédente en appliquant les lois de de Morgan.

Exercice 4. Théorème de compacité du calcul propositionnel.
Soit $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ l'ensemble des formules propositionnelles construites sur un ensemble infini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles.
Un ensemble de formules propositionnelles Σ est dit *satisfaisable* s'il existe une d.v.v. δ telle que $\delta \models F$ pour tout $F \in \Sigma$; il est dit *finiment satisfaisable* si toute partie finie $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ est satisfaisable. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème : *Un ensemble $\Sigma \subseteq {}_\mathcal{P}$ de formules propositionnelles est satisfaisable si et seulement s'il est finiment satisfaisable.*

1. Un cas particulier : On dit que Σ est *complet* si pour toute variable propositionnelle $p \in \mathcal{P}$ on a $p \in \Sigma$ ou $\neg p \in \Sigma$. Montrer le théorème ci-dessus dans le cas où Σ est complet.
2. Montrer à l'aide du lemme de Zorn que tout ensemble finiment satisfaisable de formules propositionnelles est contenu dans un ensemble finiment satisfaisable et complet.
3. Conclure.
4. Montrer le théorème dans le cas où $\mathcal{P}$ est dénombrable sans utiliser le lemme de Zorn.

Solution de l'exercice 4.

1. Si Σ est complet, remarquons d'abord que pour toute variable propositionnelle p, Σ ne peut contenir à la fois p et $\neg p$ car alors le sous-ensemble fini $\{p, \neg p\}$ ne serait pas satisfaisable. Pour toute variable propositionnelle p, on est alors forcé de définir δ comme suit :

$$\delta(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \in \Sigma \\ \neg p & \text{si } \neg p \in \Sigma \end{cases}$$

Montrons que δ satisfait toute formule de Σ : soit F une telle formule, soient $p_0, ..., p_n$ les variables propositionnelles apparaissant dans F. Posons

$$q_i = \begin{cases} p_i & \text{si } p_i \in \Sigma \\ \neg p_i & \text{si } \neg p_i \in \Sigma \end{cases},$$

alors $\Sigma_0 = \{F, q_0, ..., q_n\}$ est un sous-ensemble fini de Σ satisfaisable : soit δ' satisfaisant les éléments de Σ_0, alors comme pour $i = 0, ..., n$ on a que $\delta' \models q_i$ et par définition $\delta \models q_i$, on voit que par définition des q_i δ et δ' coincident sur l'ensemble $\{p_0, ..., p_n\}$. Or toutes les variables propositionnelles de F sont dans $\{p_0, ..., p_n\}$ donc le fait que $\delta \models F$ ou non ne dépend que de la restriction de δ à $\{p_0, ..., p_n\}$, et ainsi comme $\delta' \models F$ on a $\delta \models F$ comme voulu.

2. Soit X l'ensemble des ensembles de formules finiment satisfaisables. Alors X est de caractère fini (cf. corrigé du TD 2, exercice 4) d'après la définition d'être finiment satisfaisable : Σ est dans X ssi toute partie finie de Σ est dans X. De plus X est non vide car il contient l'ensemble vide, donc on peut appliquer le lemme de Zorn à X (pour l'inclusion) et trouver $\tilde{\Sigma}$ maximal pour l'inclusion contenant Σ. Montrons que $\tilde{\Sigma}$ est complet.
   Supposons que $\tilde{\Sigma}$ ne contienne ni p ni $\neg p$, alors par maximalité $\Sigma \cup \{p\}$ n'est pas finiment satisfaisable, donc on trouve $\Sigma_0 \subseteq \Sigma \cup \{p\}$ fini non satisfaisable, et comme $\Sigma \in X$ on a que Σ_0 contient p. Ainsi on peut écrire
   $$\Sigma_0 = \Sigma_0' \cup \{p\}$$
   avec $\Sigma_0' \subseteq \Sigma$ fini. Par le même raisonnement en remplaçant p par $\neg p$, on trouve $\Sigma_1 = \Sigma_1' \cup \{\neg p\}$ fini non satisfaisable avec $\Sigma_1' \subseteq \tilde{\Sigma}$
   Mais l'ensemble $\Sigma_0' \cup \Sigma_1'$ est fini inclus dans $\tilde{\Sigma}$, donc satisfaisable par une d.v.v. δ. Si $\delta(p) = 1$, on contredit le fait que Σ_0 n'est pas satisfaisable, et si $\delta(p) = 0$ on contredit le fait que Σ_1 n'est pas satisfaisable. Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. Donc $\tilde{\Sigma}$ contient p ou $\tilde{\Sigma}$ contient $\neg p$: on a montré que $\tilde{\Sigma}$ est complet comme voulu.
3. Il est clair que si Σ est satisfaisable, Σ est finiment satisfaisable. Réciproquement, supposons Σ finiment satisfaisable, alors par la question 2 on a $\tilde{\Sigma}$ complet finiment satisfaisable contenant Σ et par la question 1 on a que $\tilde{\Sigma}$ est satisfaisable. En particulier $\tilde{\Sigma}$ est satisfaisable, ce qui établit la preuve du théorème de compacité.
4. On construit par récurrence Σ_n finiment satisfaisable contenant Σ de sorte que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ soit complet. Le lemme clé suivant a été démontré auparavant :
   Lemme. Si Σ est finiment satisfaisable et p est une variable propositionnelle alors soit $\Sigma \cup \{p\}$ est finiment satisfaisable soit $\Sigma \cup \{\neg p\}$ est finiment satisfaisable.
   On énumère alors les variables propositionnelles $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$, et à chaque étape on ajoute p_i ou $\neg p_i$ en utilisant le lemme.

Exercice 5. Théorème de Ramsey fini.

Si A est un ensemble on note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des parties de A ayant exactement n éléments. On admet le théorème suivant (connu sous le nom de théorème de Ramsey) :

Théorème A : *Pour toute application f de $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ dans $\{0, 1\}$ il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{P}_2(A)$ soit constante.*

Le but de l'exercice est d'utiliser le théorème de compacité du calcul propositionnel (voir l'exercice précédent) pour déduire du théorème A le résultat suivant.

Théorème B : *Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier N tel que pour toute application f de $\mathcal{P}_2(\{0, 1, \ldots, N\})$ dans $\{0, 1\}$ il existe une partie $A \subseteq \{0, 1, \ldots, N\}$ à n éléments telle que f soit constante sur $\mathcal{P}_2(A)$.*

Pour cela on considère des formules propositionnelles construites sur l'ensemble de variables $\mathcal{P} = \{p_{\{n,m\}}; \{n, m\} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{N})\}$.

1. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments. Construire une formule F_A telle que si δ est une distribution de valeurs de vérité sur $\mathcal{P}$, alors $\delta \models F_A$ ssi δ est constante sur $\{p_{\{n,m\}}; \{n, m\} \in \mathcal{P}_2(A)\}$.

2. Soit $n > 1$ un entier. Montrer, en utilisant le théorème A, que l'ensemble $\{\neg F_A \ ; \ A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\}$ n'est pas satisfaisable.
3. Montrer le théorème B.
4. **Application :** On considère le jeu suivant, à deux joueurs. On place un certain nombre de points sur une feuille. Chaque joueur, à son tour, relie par un trait deux points encore non reliés, trait rouge pour le premier joueur, bleu pour le second. Le premier joueur ayant ainsi tracé un pentagone est déclaré vainqueur. Montrer que, si l'on place au départ suffisamment de points, il ne peut y avoir de partie nulle (i.e. sans vainqueur).