TD 1 – Axiomes de ZF, ordinaux

1. Des collections suivantes lesquelles sont des ensembles :
   (a) $\{R : R \text{ est une relation d'équivalence}\}$;
   (b) les ordinaux limites ;
   (c) $\{x : a \in x\}$ pour un ensemble a fixé ;
   (d) $\{x : x \text{ est dénombrable}\}$?
2. Un *plongement* d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f \colon X \to Y$ telle que $f(x) < f(x')$ ssi $x < x'$ pour tout $x, x' \in X$.
   (a) Montrer que tout bon ordre dénombrable se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
   (b) Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?
   (c) On suppose que $(X, <)$ est un bon ordre et que $(X, >)$ est également un bon ordre. Montrer que X est fini.
   (d) Trouver des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ isomorphes (pour l'ordre) à $\omega + \omega$ et à $\omega \times \omega$.
   (e) Simplifier $\omega + (\omega + 1) + (\omega + 2) + \omega + 3$ et $\omega + ((\omega \times 2) \times \omega)$.
3. Pour $n \in \omega$, on note V_n l'ensemble $\underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(....\mathcal{P}}_{n}(\emptyset)...)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \omega$, $V_n \subseteq V_{n+1}$;
   (b) Justifier l'existence de $V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$. Les ensembles dans V_ω s'appellent *héréditairement finis.*
   (c) Montrer que V_ω est un ensemble transitif ;
   (d) Montrer que $(V_\omega, \in)$ est un modèle de $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf}$;
   (e) Pour chaque entier n, montrer que $n \in V_\omega$. Quel est le plus petit $m \in \omega$ tel que $n \in V_m$?
   (f) Montrer que $(V_\omega, \in)$ ne satisfait pas l'axiome de l'infini.
4. Soit $\theta \colon \mathcal{O}n \to \mathcal{O}n$ une relation fonctionnelle strictement croissante et continue (si λ est un ordinal limite, on dit que θ est *continue* en λ si elle vérifie $\theta(\lambda) = \sup\{\theta(\gamma) : \gamma < \lambda\}$).
   (a) Soit α un ordinal. Expliquez pourquoi $\{\theta^n(\alpha) : n \in \omega\}$ est bien un ensemble.
   (b) Soit $\beta = \sup\{\theta^n(\alpha) : n \in \omega\}$. Montrer que pour tout ordinal $\gamma < \beta$ on a $\theta(\gamma) < \beta$.
   (c) Vérifier que si $\theta(\alpha) \neq \alpha$ alors la suite $(\theta^n(\alpha))_{n\in\omega}$ est strictement croissante et β est un ordinal limite.
   (d) Montrer que θ a un point fixe : il existe un ordinal γ tel que $\theta(\gamma) = \gamma$. Montrer que la collection des points fixes de θ n'est pas un ensemble.
   (e) Montrer que l'on peut définir une fonction de $\mathcal{O}n$ dans $\mathcal{O}n$ qui à tout ordinal α associe le α-ième ordinal limite. Quel est le premier point fixe de cette fonction ?
5. On rappelle qu'un ensemble t est *transitif* s'il vérifie $\forall x(x \in t \to x \subseteq t)$.
   (a) Soit t un ensemble transitif. Montrer qu'il vérifie $\forall x(x \subseteq t \to \cup x \subseteq t)$.
   (b) Soit a un ensemble fixé. On définit par récurrence $\pi^n(a)$ pour $n \in \omega$ par :
   — $\pi^0(a) = a$;
   — pour $n \in \omega$, $\pi^{n+1}(a) = \bigcup \pi^n(a) = \pi(\pi^n(a))$.
   Justifier qu'il existe un ensemble b dont les éléments sont les $\pi^n(a)$ pour $n \in \omega$ (a fixé). Montrer que la *clôture transitive* de a, $\mathrm{ct}(a) = \bigcup b$ est un ensemble transitif et que c'est le plus petit ensemble transitif contenant a.
6. Soit $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble de parties finies de $\mathbb{N}$ et σ une bijection de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$ telle que $n \in \sigma^{-1}(m)$ entraîne $n < m$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathbb{N}$ une relation binaire $\in_\sigma$ par :
$$n \in_\sigma m \text{ ssi } n \in \sigma^{-1}(m).$$
   (a) Montrer que $\mathcal{M}_\sigma = (\mathbb{N}, \in_\sigma)$ est un modèle des axiomes de $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf}$.
   (b) Montrer que $(\mathcal{M}_\sigma, \in_\sigma) \cong (V_\omega, \in)$.