TD 2 – Arithmétique des ordinaux

1) Montrer l'équivalence des deux définitions de l'addition et de la multiplication des ordinaux données en cours.

2) Montrer les propriétés suivantes des opérations arithmétiques :
   (a) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
   (b) $\alpha \leqslant \beta \implies \exists!\gamma\ \alpha+\gamma=\beta$;
   (c) $\beta<\beta' \implies \alpha+\beta<\alpha+\beta'$;
   (d) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$;
   (e) $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$;
   (f) $\alpha\neq 0$ et $\beta<\beta' \implies \alpha\beta<\alpha\beta'$.

3) Donner des contre-exemples pour les propriétés suivantes :
   (a) Commutativité de l'addtion et de la multiplication ;
   (b) $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$;
   (c) $\lambda\alpha=\sup_{\xi<\lambda}\xi\alpha$, λ limite.

4) (Division euclidienne) Soit α et β des ordinaux. Montrer qu'il existe une unique paire (γ,ρ) avec $\rho<\alpha$ telle que $\beta=\alpha\gamma+\rho$.

5) (Exponentielle) Soit $(A,<)$ et $(B,<)$ deux bons ordres et dénotons par 0 le plus élément de A. On définit l'exponentielle (faible) de A par B, $A^{(B)}$ comme suit :

$$A^{(B)}=\{f\colon B\to A : \operatorname{supp} f \text{ est fini}\},$$

où $\operatorname{supp} f=\{b\in B : f(b)\neq 0\}$. On définit un ordre sur $A^{(B)}$ par

$$f<g \iff f(b_0)<g(b_0), \quad \text{où } b_0=\max\{b : f(b)\neq g(b)\}.$$

Montrer que $A^{(B)}$ avec cet ordre est un bon ordre. On définit l'exponentielle des ordinaux par α^β est l'unique ordinal isomorphe à l'exponentielle de $(\alpha,\in)$ par $(\beta,\in)$. Montrer que cette définition est équivalente à celle donnée en cours.

6) (Forme normale de Cantor) Soit $\alpha>1$. Montrer que :
   (a) $\alpha^\gamma \geqslant \gamma$ pour tout γ ;
   (b) Si $\beta>0$, alors il existe γ tel que $\alpha^\gamma\leqslant\beta<\alpha^{\gamma+1}$;
   (c) Tout ordinal β a un développement en base α : il existe $n\in\mathbb{N}$, des ordinaux $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_n$ et des ordinaux k_i avec $0<k_i<\alpha$ tels que

$$\beta=\alpha^{\beta_1}k_1+\cdots+\alpha^{\beta_n}k_n.$$

   Quand $\alpha=\omega$, cette écriture s'appelle *la forme normale de Cantor.*

7) (Suites de Goodstein) Un entier est écrit dans **la notation héréditaire en base** b s'il est d'abord écrit dans la base b, après toutes les exposantes sont écrites dans la base b, après toutes les exposantes des exposantes, etc., jusqu'à ce qu'on n'obtienne une expression qui ne contient que des chiffres $\leqslant b$. Par exemple, 324 s'écrit dans la notation héréditaire en base 3 comme $3^{3+2}+3^{3+1}$.

La **suite de Goodstein** à partir de m est la suite $m_0, m_1, \ldots$ d'entiers définie par :
— $m_0=m$;
— si m_k est défini (et non zéro), on écrit m_k dans la notation héréditaire en base $k+2$ et pour obtenir m_{k+1} on remplace tous les $k+2$ par des $k+3$ et soustrait 1.

Par exemple, si $m_0 = 21$, on obtient :

$$\begin{aligned}
m_0 &= 21 = 2^{2^2} + 2^2 + 1 \\
m_1 &= 3^{3^3} + 3^3 \approx 7,6 \times 10^{12} \\
m_2 &= 4^{4^4} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 3 \approx 1,3 \times 10^{154} \\
m_3 &= 5^{5^5} + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 2 \approx 1,9 \times 10^{2184} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Démontrer le théorème de Goodstein : pour tout m, la suite de Goodstein à partir de m termine toujours à 0. (*Indication :* Remplacer les chiffres $k + 2$ dans m_k par ω.)

Paris et Kirby ont montré que ce théorème n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano.