TD 4 – Autour des relations bien fondées

Exercice 1. Relations bien fondées.
Soit $\prec$ une relation sur un ensemble X, on dit qu'un sous-ensemble Y de X est **inductif** si pour tout $x \in X$, si l'ensemble $\{y \in X : y \prec x\}$ est inclus dans Y, alors $x \in Y$.

(1) Montrer qu'une relation $\prec$ sur un ensemble X est bien fondée ssi le seul sous-ensemble inductif non vide de X est X. C'est ce qui permet de faire des *preuves par induction bien fondée.*

(2) Montrer que la cloture transitive [1] de toute relation bien fondée est une relation d'ordre stricte bien fondée. Si $\prec$ est une relation bien fondée, on note $<$ sa cloture transitive.

Si $x \in X$ on note $\prec_x := \{y \in X : y \prec x\}$ et $<_x := \{y \in X : y < x\}$. Soit H une relation fonctionnelle d'image la collection $\mathcal{C}$ et telle que pour tout $x \in X$, toute fonction de domaine $\prec_x$ à valeur dans $\mathcal{C}$ soit dans le domaine de H. Une fonction f de domaine X est H-inductive si pour tout $x \in X$,

$$f(x) = H(f_{\restriction \prec_x}).$$

(3) Montrer que si H est comme ci-dessus et $(X, \prec)$ est bien fondé alors il existe une et une seule fonction H-inductive de domaine X. [2] On dit qu'une telle fonction est *construite par induction bien fondée.*

Soit $\mathcal{C}$ une collection. Une relation $\prec$ sur $\mathcal{C}$ est dite **bien fondée** si pour tout $x \in X$, la collection $\prec_x$ est un ensemble et si toute sous-collection de $\mathcal{S}$ non vide admet un élément $\prec$-minimal.

(4) Montrer que l'univers $\mathcal{U}$ est bien fondé pour $\in$ ssi AF est vérifié.

(5) Montrer que l'on peut faire des constructions de relations fonctionnelles par induction bien fondée.

(6) Soit $(\mathcal{C}, \prec)$ une classe bien fondée. On construit par induction bien fondée la relation fonctionnelle $\mathrm{rg}_\prec : \mathcal{C} \to \mathcal{O}n$ en posant

$$\mathrm{rg}_\prec(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est minimal,} \\ \sup\{\mathrm{rg}(y) : y \prec x\} + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Expliquer pourquoi une telle construction est bien définie.

(7) On suppose que $\mathcal{U}$ satisfait AF. Montrer que $\mathrm{rg}_\in = \mathrm{rg}$.

Exercice 2. Arbres bien fondés.
Soit A un ensemble. On note $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$ l'ensemble des mots finis sur A, on note $\emptyset$ le mot vide et on note $\subseteq$ la relation de préfixe entre mots de A. Un *arbre* sur A est une partie T de $A^{<\omega}$ qui est close par préfixe : si $x \in T$ et $y \subseteq x$ alors $y \in T$.
Un arbre T s'appelle *bien fondé* si la relation $(T, \supset)$ est bien fondée. Remarquons que le mot vide $\emptyset$ appartient à tout arbre non-vide ; $\emptyset$ s'appelle *la racine* de l'arbre. Enfin, un arbre est *équeuté* si pour tout $x \in T$ il existe $a \in A$ telle que $xa \in T$.

(1) Montrer que l'axiome du choix dépendant est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble A et tout arbre T non vide équeuté sur A , il existe une suite $(a_n) \in A^\omega$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \cdots a_n \in T$ (on dit que (a_n) est une *branche infinie* de T).

(2) (Lemme de König) Montrer que si A est fini, alors T est bien fondé ssi il est fini.

1. La cloture transitive d'une relation est par définition la plus petite relation transitive contenant la relation en question. On voit facilement que si R est une relation, sa cloture transitive est l'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe $n \in \omega$ et $x_0, ..., x_n$ avec $x_0 = x$, $x_n = y$ et pour tout $i \in n$, $(x_i, x_{i+1}) \in R$.

2. On pourra montrer par induction sur $x \in X$ que pour tout $x \in X$ il existe une unique fonction H-inductive de domaine $<_x$.

(3) Donner des exemples d'arbres dont la racine est de rang $1, 5, \omega + 1, \omega^2 + 1, \omega^\omega + 1$. Montrer que pour tout ordinal dénombrable α, il existe un arbre sur ω dont la racine a rang $\alpha + 1$. Inversement, montrer que le rang de tout élément d'un arbre sur A est toujours plus petit que $|A|^+$.

(4) Dans cette partie on suppose que $A = \alpha$ est un ordinal. L'*ordre de Kleene–Brouwer* sur $A^{<\omega}$ est défini par

$$s <_{KB} t \iff (s \supset t) \vee \exists i < \min(m, n)\ \forall j < i\ s_j = t_j \wedge s_i < t_i,$$

où $s = (s_0, \ldots, s_{m-1})$, $t = (t_0, \ldots, t_{n-1})$ sont des éléments de $A^{<\omega}$.

(a) Montrer que $<_{KB}$ est un ordre total sur $A^{<\omega}$;

(b) Montrer que si $T \subseteq A^{<\omega}$ est un arbre, alors T est bien fondé ssi $<_{KB} |_T$ est un bon ordre.

Solution de l'exercice 2.

(1) Si on a le choix dépendant, on se donne un arbre T sur A non vide équeuté, on considère l'ensemble T muni de la relation $s \prec t$ ssi t est un suffixe strict de s ; par hypothèse tout $s \in T$ a un successeur pour cette ordre, et l'axiome du choix nous garantit l'existence d'une suite strictement croissante (s_n). Voyant chaque s_n comme une suite finie d'éléments de A, il suffit alors de poser $a_n =$ le n-ième terme de la suite s_n, alors on vérifie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une branche infinie de T.

Réciproquement supposons que tout arbre équeuté non vide admet une branche, soit X un ensemble non vide et $\prec$ une relation sur X telle qu'aucun $x \in X$ ne soit maximal, alors on définit un arbre T sur X dont les éléments sont les suites finies $(x_1, ..., x_n)$ telles que pour i allant de 1 à $n - 1$, on ait $x_i \prec x_{i+1}$. Cet arbre est équeuté, non vide car X est non vide. Une branche infinie de cet arbre nous fournit la suite voulue, et (ACD) est donc établi.

(2) Si A est fini, on pose $S = \{s \in T : \{t \in T : s \subset t\}$ est infini$\}$. S est clairement un arbre, il est équeuté car A est fini (si s a une infinité de descendants, comme il n'a qu'un nombre fini d'enfants, c'est qu'un de ses enfants a lui-même une infinité de descendants). C'est donc un sous-ensemble de T non bien fondé. Réciproquement, comme $\supset$ est une relation d'ordre stricte, tout arbre fini admet un élément minimal, donc si T est fini alors il est bien fondé.

(3) $T = \{\emptyset, a\}$ a sa racine de rang 1, $T = \{\emptyset, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa\}$ a rang 5. Par induction transfinie pour tout $\alpha < \omega_1$ il existe un arbre dont la racine a rang $\alpha + 1$. En effet, si pour tout $\beta < \alpha$ on a un arbre T_α dont la racine a rang $\beta + 1$, on énumère $\alpha = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$. On a T_n arbre sur ω dont la racine est de rang $\beta_n + 1$, on définit alors un arbre T par $T = \{nt : n \in \mathbb{N}, t \in T_n\}$ (autrement dit on rattache toutes les racines des T_n à une nouvelle racine). Il est clair que le rang de la nouvelle racine est $(\sup_n \beta_n + 1) + 1$, or $\sup_n \beta_n + 1 = \alpha$ donc on a le résultat voulu.

(4) (a) Pour montrer la transitivité, il est plus confortable de considérer qu'on a un symbole supplémentaire ∞ plus grand que tous les éléments de A, et qu'on identifie tout élement de $A^{<\omega}$ à un élément de $(A \cup \{\infty\})^\omega$ en le concaténant avec la suite infinie constante égale à ϵ.

On se ramène alors à montrer que l'ordre lexicographique sur les suites infinies est un ordre total, ce qui fait disparaître le cas $s \supset t$. L'irréflexivité est toujours claire, montrons la transitivité : supposons $(a_n) < (b_n) < (c_n)$, soit k l'entier à partir du quel (a_n) et (b_n) diffèrent et l l'entier à partir duquel diffèrent (b_n) et (c_n). Par définition de l'ordre de Kleene-Brouwer et totalité de l'ordre sur A on a $a_k < b_k$ et $b_l < c_l$. Si $k = l$ clairement $(a_n) < (c_n)$, si $k < l$ alors (a_n) et (c_n) diffèrent à partir du rang k et $a_k < b_k = c_k$, si $k > l$ elles diffèrent à partir du rang l et $a_l = b_l < c_l$; dans tous les cas on a bien $(a_n) < (c_n)$ comme voulu. Pour montrer que l'ordre est total, on regarde le premier moment où les deux suites diffèrent et on utilise la totalité de l'ordre sur A.

(b) Remarquons qu'un minimum pour l'ordre de Kleene-Brouwer doit être minimal pour $\supset$ donc si $<_{KB}$ est un bon ordre, alors $\supset$ est bien fondée. Récproquement, supposons $\supset$ bien fondée, soit $S \subseteq T$ non vide. L'ensemble des préfixes des éléments de T est un arbre, et par définition de l'ordre de Kleene-Brouwer il suffit de montrer que ce dernier a un minimum, autrement dit on peut supposer que S est un sous arbre. On considère alors un ensemble G formé des éléments de S *les plus à gauche*, c'est-à-dire que $g \in G$ ssi pour tout $s \in S$ de longueur $k \leqslant |s|$, on a $g_0 \leqslant s_0 ... \, g_{k-1} \leqslant s_{k-1}$. Il est clair que G est encore un sous-arbre et que tous ses éléments sont comparables pour $\supset$. Un élément minimal de G est alors un minimum de L.

Exercice 3. Le retour de l'appartenance tordue.

(1) En utilisant les notions de formules bornées vues en cours, donner une preuve complète du fait que V_ω satisfait les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini.

(2) On fixe une bijection σ entre $\mathcal{P}_f(\omega)$ (l'ensemble des parties finies de ω) et ω, et on définit une relation $\in_\sigma$ sur ω par $x \in_\sigma y$ si $x \in \sigma^{-1}(y)$. Montrer que $(V_\omega, \in)$ se plonge dans $(\omega, \in_\sigma)$ de manière unique.

(3) Montrer que si σ satisfait que $x \in \sigma^{-1}(y)$ implique $x < y$, alors le plongement est un isomorphisme.

(4) Donner un exemple de tel σ.

Exercice 4. Ensembles dont la cloture transitive est petite.

On se place dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZFC+AF. Si x est un ensemble on note par $\mathrm{ct}(x)$ la clôture transitive de x. On définit pour un cardinal κ,

$$H(\kappa) = \{x : |\,\mathrm{ct}(x)| < \kappa\}\,.$$

(1) Montrer que $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ pour tout κ et conclure que $H(\kappa)$ est un ensemble.

(2) Soit κ régulier. Montrer que $H(\kappa) = V_\kappa$ ssi κ est fortement limite.

(3) Montrer les propriétés suivantes de $H(\kappa)$:
— $H(\kappa)$ est transitif ;
— $H(\kappa) \cap \mathcal{O}n = \kappa$;
— $x \in H(\kappa)$, alors $\bigcup x \in H(\kappa)$;
— si $x, y \in H(\kappa)$, alors $\{x, y\} \in H(\kappa)$;
— si $x \in H(\kappa)$ et $y \subseteq x$, alors $y \in H(\kappa)$;
— si κ est régulier, alors

$$\forall x \; x \in H(\kappa) \iff x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa.$$

(4) Montrer que si κ est régulier et non dénombrable, alors $H(\kappa) \models \mathrm{ZFC} - \mathsf{P}$. En conclure que l'axiome des parties n'est pas une conséquence des autres axiomes de ZFC.