

---

## TD 4 – Autour des relations bien fondées

---

### Exercice 1. Relations bien fondées.

Soit  $\prec$  une relation sur un ensemble  $X$ , on dit qu'un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est **inductif** si pour tout  $x \in X$ , si l'ensemble  $\{y \in X : y \prec x\}$  est inclus dans  $Y$ , alors  $x \in Y$ .

- (1) Montrer qu'une relation  $\prec$  sur un ensemble  $X$  est bien fondée ssi le seul sous-ensemble inductif non vide de  $X$  est  $X$ . C'est ce qui permet de faire des *preuves par induction bien fondée*.
- (2) Montrer que la clôture transitive<sup>1</sup> de toute relation bien fondée est une relation d'ordre stricte bien fondée. Si  $\prec$  est une relation bien fondée, on note  $<$  sa clôture transitive.

Si  $x \in X$  on note  $\prec_x := \{y \in X : y \prec x\}$  et  $<_x := \{y \in X : y < x\}$ . Soit  $H$  une relation fonctionnelle d'image la collection  $\mathcal{C}$  et telle que pour tout  $x \in X$ , toute fonction de domaine  $\prec_x$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  soit dans le domaine de  $H$ . Une fonction  $f$  de domaine  $X$  est  $H$ -inductive si pour tout  $x \in X$ ,

$$f(x) = H(f|_{\prec_x}).$$

- (3) Montrer que si  $H$  est comme ci-dessus et  $(X, \prec)$  est bien fondé alors il existe une et une seule fonction  $H$ -inductive de domaine  $X$ .<sup>2</sup> On dit qu'une telle fonction est *construite par induction bien fondée*.

Soit  $\mathcal{C}$  une collection. Une relation  $\prec$  sur  $\mathcal{C}$  est dite **bien fondée** si pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , la collection  $\prec_x$  est un ensemble et si toute sous-collection de  $\mathcal{C}$  non vide admet un élément  $\prec$ -minimal.

- (4) Montrer que l'univers  $\mathcal{U}$  est bien fondé pour  $\in$  ssi AF est vérifié.
- (5) Montrer que l'on peut faire des constructions de relations fonctionnelles par induction bien fondée.
- (6) Soit  $(\mathcal{C}, \prec)$  une classe bien fondée. On construit par induction bien fondée la relation fonctionnelle  $\text{rg}_\prec : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}n$  en posant

$$\text{rg}_\prec(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est minimal,} \\ \sup\{\text{rg}(y) : y \prec x\} + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Expliquer pourquoi une telle construction est bien définie.

- (7) On suppose que  $\mathcal{U}$  satisfait AF. Montrer que  $\text{rg}_\in = \text{rg}$ .

### Exercice 2. Arbres bien fondés.

Soit  $A$  un ensemble. On note  $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} A^n$  l'ensemble des mots finis sur  $A$ , on note  $\emptyset$  le mot vide et on note  $\subseteq$  la relation de préfixe entre mots de  $A$ . Un *arbre* sur  $A$  est une partie  $T$  de  $A^{<\omega}$  qui est close par préfixe : si  $x \in T$  et  $y \subseteq x$  alors  $y \in T$ .

Un arbre  $T$  s'appelle *bien fondé* si la relation  $(T, \supseteq)$  est bien fondée. Remarquons que le mot vide  $\emptyset$  appartient à tout arbre non-vide;  $\emptyset$  s'appelle *la racine* de l'arbre. Enfin, un arbre est *équeuté* si pour tout  $x \in T$  il existe  $a \in A$  telle que  $xa \in T$ .

- (1) Montrer que l'axiome du choix dépendant est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble  $A$  et tout arbre  $T$  non vide équeuté sur  $A$ , il existe une suite  $(a_n) \in A^\omega$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0 \cdots a_n \in T$  (on dit que  $(a_n)$  est une *branche infinie* de  $T$ ).

---

1. La clôture transitive d'une relation est par définition la plus petite relation transitive contenant la relation en question. On voit facilement que si  $R$  est une relation, sa clôture transitive est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels qu'il existe  $n \in \omega$  et  $x_0, \dots, x_n$  avec  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$  et pour tout  $i \in n$ ,  $(x_i, x_{i+1}) \in R$ .

2. On pourra montrer par induction sur  $x \in X$  que pour tout  $x \in X$  il existe une unique fonction  $H$ -inductive de domaine  $<_x$ .

- (2) (Lemme de König) Montrer que si  $A$  est fini, alors  $T$  est bien fondé ssi il est fini.
- (3) Donner des exemples d'arbres dont la racine est de rang  $1, 5, \omega, \omega^2, \omega^\omega$ . Montrer que pour tout ordinal dénombrable  $\alpha$ , il existe un arbre sur  $\omega$  dont la racine a rang  $\alpha$ . Inversement, montrer que le rang de tout élément d'un arbre sur  $A$  est toujours plus petit que  $|A|^+$ .
- (4) Dans cette partie on suppose que  $A = \alpha$  est un ordinal. L'ordre de Kleene–Brouwer sur  $A^{<\omega}$  est défini par

$$s <_{KB} t \iff (s \supset t) \vee \exists i < \min(m, n) \forall j < i s_j = t_j \wedge s_i < t_i,$$

où  $s = (s_0, \dots, s_{m-1})$ ,  $t = (t_0, \dots, t_{n-1})$  sont des éléments de  $A^{<\omega}$ .

- (a) Montrer que  $<_{KB}$  est un ordre total sur  $A^{<\omega}$  ;
- (b) Montrer que si  $T \subseteq A^{<\omega}$  est un arbre, alors  $T$  est bien fondé ssi  $<_{KB} \upharpoonright_T$  est un bon ordre.

### Exercice 3. Le retour de l'appartenance tordue.

- (1) En utilisant les notions de formules bornées vues en cours, donner une preuve complète du fait que  $V_\omega$  satisfait les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini.
- (2) On fixe une bijection  $\sigma$  entre  $\mathcal{P}_f(\omega)$  (l'ensemble des parties finies de  $\omega$ ) et  $\omega$ , et on définit une relation  $\in_\sigma$  sur  $\omega$  par  $x \in_\sigma y$  si  $x \in \sigma^{-1}(y)$ . Montrer que  $(V_\omega, \in)$  se plonge dans  $(\omega, \in_\sigma)$  de manière unique.
- (3) Montrer que si  $\sigma$  satisfait que  $x \in \sigma^{-1}(y)$  implique  $x < y$ , alors le plongement est un isomorphisme.
- (4) Donner un exemple de tel  $\sigma$ .

### Exercice 4. Ensembles dont la clôture transitive est petite.

On se place dans un modèle  $\mathcal{U}$  de ZFC+AF. Si  $x$  est un ensemble on note par  $\text{ct}(x)$  la clôture transitive de  $x$ . On définit pour un cardinal  $\kappa$ ,

$$H(\kappa) = \{x : |\text{ct}(x)| < \kappa\}.$$

- (1) Montrer que  $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$  pour tout  $\kappa$  et conclure que  $H(\kappa)$  est un ensemble.
- (2) Soit  $\kappa$  régulier. Montrer que  $H(\kappa) = V_\kappa$  ssi  $\kappa$  est fortement limite.
- (3) Montrer les propriétés suivantes de  $H(\kappa)$  :
- $H(\kappa)$  est transitif ;
  - $H(\kappa) \cap \mathcal{O}n = \kappa$  ;
  - $x \in H(\kappa)$ , alors  $\bigcup x \in H(\kappa)$  ;
  - si  $x, y \in H(\kappa)$ , alors  $\{x, y\} \in H(\kappa)$  ;
  - si  $x \in H(\kappa)$  et  $y \subseteq x$ , alors  $y \in H(\kappa)$  ;
  - si  $\kappa$  est régulier, alors

$$\forall x x \in H(\kappa) \iff x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa.$$

- (4) Montrer que si  $\kappa$  est régulier et non dénombrable, alors  $H(\kappa) \models \text{ZFC} - \text{P}$ . En conclure que l'axiome des parties n'est pas une conséquence des autres axiomes de ZFC.