TD 5 – Plus de modèles intérieurs

Exercice 1. Le retour de l'appartenance tordue.

(1) En utilisant les notions de formules bornées vues en cours, donner une preuve complète du fait que V_ω satisfait les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini.

(2) On fixe une bijection σ entre $\mathcal{P}_f(\omega)$ (l'ensemble des parties finies de ω) et ω, et on définit une relation $\in_\sigma$ sur ω par $x \in_\sigma y$ si $x \in \sigma^{-1}(y)$. Montrer que $(V_\omega, \in)$ se plonge dans $(\omega, \in_\sigma)$ de manière unique.

(3) Montrer que si σ satisfait que $x \in \sigma^{-1}(y)$ implique $x < y$, alors le plongement est un isomorphisme.

(4) Donner un exemple de tel σ.

Exercice 2. Ensembles dont la cloture transitive est petite.
On se place dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZFC+AF. Si x est un ensemble on note par $\mathrm{ct}(x)$ la clôture transitive de x. On définit pour un cardinal κ,

$$H(\kappa) = \{x : |\,\mathrm{ct}(x)| < \kappa\}\,.$$

(1) Montrer que $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ pour tout κ régulier et conclure que $H(\kappa)$ est un ensemble.

(2) Soit κ régulier. Montrer que $H(\kappa) = V_\kappa$ ssi κ est fortement limite.

(3) Montrer les propriétés suivantes de $H(\kappa)$:
— $H(\kappa)$ est transitif ;
— $H(\kappa) \cap \mathcal{O}n = \kappa$;
— $x \in H(\kappa)$, alors $\bigcup x \in H(\kappa)$;
— si $x \in H(\kappa)$ et $y \subseteq x$, alors $y \in H(\kappa)$;
— si κ est régulier, alors

$$\forall x\ x \in H(\kappa) \iff x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa.$$

(4) Montrer que si κ est régulier et non dénombrable, alors $H(\kappa) \models \mathrm{ZFC} - \mathsf{P}$. En conclure que l'axiome des parties n'est pas une conséquence des autres axiomes de ZFC.

Exercice 3. Modèles de Frænkel–Mostowski
On se place dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZF.

(1) Soit $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ une classe fonctionnelle qui est une bijection de $\mathcal{U}$. On note par $x \in' y$ la formule $x \in F(y)$. Montrer que $(\mathcal{U}, \in')$ est un modèle de ZF.

(2) Montrer que si $(\mathcal{U}, \in)$ satisfait l'axiome du choix alors $(\mathcal{U}, \in')$ le satisfait aussi.

(3) Un *atome* est un ensemble a tel que $a = \{a\}$. Montrer qu'on peut choisir F pour que $(\mathcal{U}, \in')$ ait un atome.

(4) En déduire que si ZF / ZFC est cohérente, alors $(\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{AF})$ / $(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{AF})$ l'est aussi.

(5) Montrer qu'on peut choisir F pour que, dans $(\mathcal{U}, \in')$, l'ensemble des atomes soit dénombrable infini.

Exercice 4. Modèles de Frænkel–Mostowski, suite

On travaille dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZF ayant un ensemble $\mathcal{A}$ non vide d'atomes. On définit par induction transfinie :

$$W_0 = \mathcal{A}$$
$$W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha)$$
$$W_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha \quad \text{si } \lambda \text{ limite.}$$

(1) Soit W la classe $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$. Montrer que $(W, \in\restriction_W) \models \mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$.

(2) Montrer que W satisfait

$$\forall a \quad a \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in a\ (b = \{b\} \vee a \cap b = \emptyset).$$

En déduire qu'un élément a de W est un atome (au sens de W) si et seulement si $a \in W_0$.

(3) Montrer que $\mathcal{U} \models W = W^W$.