Paradoxe de Banach-Tarski et un peu de théorie descriptive des ensembles

Exercice 1. Puzzle équivalence

Deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^3$ sont dits **puzzle-équivalents** s'il existe deux partitions $(A_1, ..., A_n)$ et $(B_1, ..., B_n)$ de A et B respectivement et des isométries de $\mathbb{R}^3$ $\varphi_1, ..., \varphi_n$ telles que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on ait $\varphi_i(A_i) = B_i$. On note $A \sim_{PE} B$ si A et B sont puzzle-équivalents.

(1) Montrer que la relation $\lesssim_{PE}$ est une relation de préordre (réflexive et transitive). Est-elle totale ?

(2) Montrer que si $A \lesssim_{PE} B$ et $B \lesssim_{PE} A$ alors $A \sim_{PE} B$.

(3) En déduire que $\sim_{PE}$ est une relation d'équivalence.

Le but des trois exercices qui suivent est de montrer le théorème suivant.

Théorème (Banach-Tarski, 1924)**.** Soient B_1 et B_2 deux boules unité fermées disjointes dans $\mathbb{R}^3$. Alors $B_1 \sim_{PE} B_1 \sqcup B_2$.

Exercice 2. Sous-groupe libre de $SO(3)$

Nous allons maintenant établir l'existence d'un sous-groupe libre à 2 générateurs dans $SO(3)$. Voici les deux éléments de $SO(3)$ dont on va montrer qu'ils engendrent un sous-groupe libre :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On se donne un mot réduit ω en $T^{\pm 1}$ et $U^{\pm 1}$, on cherche à montrer que $\omega \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

(1) Expliquer pourquoi on peut se ramener au cas où ω finit par T. On suppose désormais que c'est le cas.

(2) Montrer que si k est la longueur de ω, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels qu'on a $\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}$.

(3) Montrer qu'en outre, b n'est pas divisible par 3. On pourra faire une preuve par récurrence sur k et écrire, dans le cas où $k \geqslant 2$, ω sous la forme abv, où $a, b \in \{T, T^{-1}, U, U^{-1}\}$ et distinguer les quatre cas selon que a et b sont de la forme $T^{\pm 1}$ ou $U^{\pm 1}$.

(4) Conclure.

Exercice 3. Paradoxe de Hausdorff

On se propose de démontrer le résultat intermédiaire suivant.

Théorème (Hausdorff, 1914)**.** Il existe une partie dénombrable D de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ et une partition $\mathbb{S}^2 \setminus D = A \sqcup B$ telle que $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{S}^2 \setminus D$. De plus, on peut implémenter cette puzzle-équivalence avec uniquement des isométries fixant le centre de la sphère unité.

On note $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ le groupe libre à 2 générateurs.

(1) Montrer que si on note, pour $l \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, $C_l = \{x \in \mathbb{F}_2 : x \text{ commence par } l\}$, alors

$$\mathbb{F}_2 = C_{a^{-1}} \sqcup a^{-1}C_a,$$
$$\mathbb{F}_2 = C_{b^{-1}} \sqcup b^{-1}C_b,$$
$$\mathbb{F}_2 = C_{a^{-1}} \sqcup C_a \sqcup C_{b^{-1}} \sqcup C_b \sqcup \{e\}.$$

(2) On se donne une copie de $\mathbb{F}_2$ dans $SO(3)$ fournie par l'exercise précédent. Montrer qu'il existe un sous-ensemble $D \subseteq \mathbb{S}^2$ dénombrable $\mathbb{F}_2$-invariant tel que l'action de $\mathbb{F}_2$ sur $\mathbb{S}^2 \setminus D$ soit *libre* (pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$, tout $x \in \mathbb{S}^2$, $\gamma \cdot x \neq x$).

(3) En considérant une partie X de $\mathbb{S}^2 \setminus D$ qui intersecte chaque $\mathbb{F}_2$-orbite en exactement un point, trouver A, B disjoints inclus dans $\mathbb{S}^2 \setminus D$ tels que $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{S}^2 \setminus D$. On pourra utiliser la question 1.

(4) Conclure.

Exercice 4. Paradoxe de Banach-Tarski

On se propose de démontrer le paradoxe de Banach-Tarski à partir du paradoxe de Hausdorff, que l'on a démontré précédemment. On note $A \lesssim_{PE} B$ s'il existe une partie $C \subseteq B$ telle que $A \sim_{PE} B$.

(1) Montrer que si D est un sous-ensemble dénombrable de la sphère, alors on peut trouver une rotation R telle que les ensembles $(R^i(D))_{i\in\mathbb{N}}$ soient tous disjoints (on pourra fixer un axe de rotation A ne contenant aucun élément de D puis montrer que l'ensemble des angles de rotation $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la rotation $R_{A,\theta}$ ne satisfait pas la propriété voulue est dénombrable).

(2) Montrer que si R et D sont comme dans la question précédente, alors

$$\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} R^i(D) \sim_{PE} \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} R^i(D).$$

En déduire que $\mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{PE} \mathbb{S}^2$.

(3) Montrer qu'il existe une partition $\mathbb{S}^2 = A \sqcup B$ telle que $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{S}^2$.

(4) En déduire qu'il existe une partition de la boule unité fermée privée de son centre $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\} = A \sqcup B$ avec $A \sim_{PE} B \sim_{PE} \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$

(5) En utilisant un argument similaire à la question 3, montrer que si $x \in \mathbb{S}^2$, alors $\mathbb{B}^2 \setminus \{x\} \sim_{PE} \mathbb{B}^2$.

(6) Conclure qu'il existe une partition $\mathbb{B}^2 = A \sqcup B$ telle que $\mathbb{B}^2 \sim_{PE} A \sim_{PE} B$. En déduire le paradoxe de Banach-Tarski tel qu'énoncé ci-dessus.

(7) Montrer que toute réunion finie de boules unité fermées est puzzle-équivalente à la boule unité fermée.

(8) Démontrer le théorème suivant de Banach et Tarski, moins connu mais plus fort que l'énoncé précédent.

Théorème (Banach-Tarski, 1924)**.** Soient E_1 et E_2 deux parties bornées de $\mathbb{R}^3$ et d'intérieur non vide, alors $E_1 \sim_{PE} E_2$.

Exercice 5. Argument diagonal de Cantor et un peu de théorie descriptive des ensembles

Si $B \subseteq X \times Y$, pour $x \in X$ on note $B_x := \{y \in Y : (x, y) \in B\}$ la **section verticale** de B au dessus de x.

(1) Soit X un ensemble, soit $A \subseteq X \times X$, on définit l'**antidiagonale** de A comme étant l'ensemble

$$B := \{x \in X : (x, x) \notin A\}.$$

Montrer que pour tout $x \in X$, $A_x \neq B$.

(2) En déduire que $\mathcal{P}(\omega)$ n'est pas dénombrable. On pourra supposer que c'est le cas et construire un ensemble $A \subseteq \omega \times \omega$ dont les sections verticales sont les parties de ω.

(3) On va maintenant appliquer cette construction en théorie descriptive des ensembles. On considère l'espace de Cantor, qui est l'espace topologique $X := 2^\omega$ muni de la topologie produit, en considérant que $2 = \{0, 1\}$ est un espace discret. On va montrer qu'il y a une hiérarchie stricte indexée par ω_1 des boréliens de 2^ω. On définit par récurrence transfinie sur $1 \leqslant \xi < \omega_1$ les ensembles suivants :
— $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{O \subseteq X : O \text{ est ouvert}\}$,
— $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \{B \subseteq X : X \setminus B \in \Sigma^0_\xi(X)\}$,
— $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ est l'ensemble des réunions dénombrables d'éléments de $\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Pi}^0_\eta(X)$.

(a) Montrer que pour tout $1 \leqslant \xi < \eta < \omega_1$, $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\eta(X)$. Pour $\xi = 1$, on pourra munir 2^ω d'une distance d compatible avec sa topologie, par exemple $d(x, y) = \sum_n 2^{-n}\delta(x_n, y_n)$ où $\delta(a, b) = 0$ si $a = b$ et $\delta(a, b) = 1$ si $a \neq b$.

(b) On note $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des boréliens de X. Montrer que $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{1\leqslant\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$.

(c) En déduire que $|\mathcal{B}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

(d) Montrer qu'il existe $O \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X \times X)$ tel que pour tout $U \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$, il existe $x \in X$ tel que $U = O_x$.

(e) Montrer que pour tout $1 \leqslant \xi < \omega_1$, il existe $O \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X \times X)$ tel que pour tout $U \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$, il existe $x \in X$ tel que $U = O_x$.

(f) En déduire que pour tout $1 \leqslant \xi < \omega_1$, $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \neq \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}(X)$.

(g) Montrer qu'il n'existe pas $U \in \mathcal{B}(X \times X)$ tel que pour tout $U \in \mathcal{B}(X)$, il existe $x \in X$ tel que $U = O_x$.