Examen corrigé

Durée : 3h

Les notes de cours sont les seuls documents autorisés. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Sous algèbres Gamma maximales.
Soit (M, τ) une algèbre de von Neumann finie, soit $N \subseteq M$ une sous-algèbre. Une suite bornée (x_n) d'éléments de M est dite N**-centrale** si pour tout $x \in N$, on a $\|xu_n - u_n x\|_2 \to 0$.
On dit que N a la **propriété Gamma** si il existe une suite N-centrale $u_n \in \mathcal{U}(N)$ telle que u_n tende faiblement vers 0.

1. Soit Γ un groupe. Montrer qu'une suite d'unitaires $u_n \in L\Gamma$ tend faiblement vers 0 ssi ses coefficients de Fourier tendent vers 0.
2. Montrer que $L\mathbb{Z}$ a la propriété Gamma.
3. Soit Γ un groupe dénombrable, soit $\Lambda \leqslant \Gamma$. On dit qu'une partie finie $F \subseteq \Gamma \setminus \Lambda$ est Λ**-errante** s'il existe une suite infinie (λ_k) d'éléments de Λ telle que
$$\lambda_k^{-1} F \lambda_k \cap \lambda_{k'}^{-1} F \lambda_{k'} = \emptyset \text{ pour tous } k \neq k'$$
Une telle suite (λ_k) est appelée **suite disjoignante**. Enfin, étant donné un sous-ensemble F de Γ, on note P_F la projection orthogonale sur $\ell^2(F)$. Montrer que si $(x_n) \in L\Gamma$ est une suite bornée $L\Lambda$-centrale, et si $F \subseteq \Gamma \setminus \Lambda$ est $L\Lambda$-errante, alors $\|P_F(x_n)\|_2 \to 0$. On pourra raisonner par l'absurde.
4. Soit Λ un sous-groupe de Γ tel que pour tous $s, t \in \Gamma \setminus \Lambda$, il existe un ensemble Λ-errant $F \subseteq \Gamma \setminus \Lambda$ tel que $sF^c t \cap F^c$ soit fini. Soit P une sous-algèbre de $L\Gamma$ contenant $L\Lambda$ et ayant la propriété Gamma, on va montrer que $P = L\Lambda$. Soit donc $(v_n) \in \mathcal{U}(P)$ une suite P-centrale qui tend faiblement vers 0.
   (a) Soient $s, t \in \Gamma \setminus \Lambda$, soit F l'ensemble Λ-errant fourni par l'hypothèse, soit $K = sF^c t \cap F^c$, qui est fini par hypothèse. En utilisant la question précédente, montrer que
   $$\limsup_n |\langle u_s v_n u_t, v_n \rangle| \leqslant \limsup_n \|P_K(v_n)\|_2 ,$$
   où u_s et u_t sont les unitaires dans $L\Gamma$ correspondant à s et t.
   (b) En déduire que pour tout $a \in P \ominus L\Lambda$, on a $\lim_n \langle a v_n a^*, v_n \rangle = 0$.
   (c) Conclure en utilisant le fait que (v_n) est centrale.

   On peut par exemple montrer qu'une telle propriété est satisfaite par le sous-groupe $\Lambda = \langle a \rangle$ dans le groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$, ce qui montre que $L\langle a \rangle$ est en fait une sous-algèbre maximale de $L\mathbb{F}_2$ ayant la propriété Gamma. De plus, toute algèbre moyennable a la propriété Gamma, donc ceci prouve en particulier que $L\langle a \rangle$ est une sous algèbre moyennable maximale de $L\mathbb{F}_2$.

Solution de l'exercice 1.

1. On a $\left\langle u_n \delta_g, \delta_{g'} \right\rangle = \left\langle u_n \delta_{gg'^{-1}}, \delta_e \right\rangle = \tau(u_n u^*_{g'g^{-1}})$, d'où le résultat puisque les δ_g engendrent un sous espace dense de $\ell^2(\Gamma)$ et la suite (u_n) est bornée.
2. Il suffit de considérer la suite d'unitaires donnée par les u_n, car chacun de ses coefficients de Fourier est nul à partir d'un certain rang (plus généralement c'est le cas de toute suite qui tend vers l'infini dans tout groupe). Comme $L\mathbb{Z}$ est abélien, la suite est bien centrale.
3. Supposons que ce ne soit pas le cas, quitte extraire une sous-suite on peut supposer que $\|P_F(x_n)\|_2 \to \epsilon > 0$. Soit $\lambda \in \Lambda$, on a $\|u_\lambda x_n u_\lambda^* - x_n\|_2 \leqslant \|u_\lambda x_n - x_n u_\lambda\|_2 \|u_\lambda^*\| \to 0$. En particulier comme (x_n) est bornée, $\|P_F(u_\lambda x_n u_\lambda^*) - P_F(x_n)\|_2 \to 0$, et donc $\|P_F(u_\lambda x_n u_\lambda^*)\|_2 \to \epsilon$. Mais $\|P_F(u_\lambda x_n u_\lambda^*)\|_2 = \|P_{\lambda^{-1}F\lambda}(x_n)\|_2$,et par hypothèse on a une suite infinie λ_k telle que les $P_{\lambda_k^{-1}F\lambda_k}$ soient orthogonales deux à deux, ce qui est contradictoire avec le fait que la suite (x_n) soit bornée.

4. (a) Par continuité et la question précédente, on a

$$\limsup_n |\langle u_s v_n u_t, v_n\rangle| = \limsup_n |\langle u_s P_{F^c}(v_n) u_t, P_{F^c}(v_n)\rangle|$$

Or $u_s P_{F^c}(v_n) u_t$ est supporté sur $\ell^2(sF^c t)$, donc on a

$$\langle u_s P_{F^c}(v_n) u_t, P_{F^c}(v_n)\rangle = \langle u_s P_{F^c}(v_n) u_t, P_{sF^c t} \circ P_{F^c}(v_n)\rangle \leqslant \|P_K(v_n)\|_2 ,$$

la dernière inégalité utilisant que $P_{sF^c t} \circ P_{F^c} = P_K$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, d'où le résultat.

(b) Comme v_n tend faiblement vers 0 et K est fini, on a que $\|P_K(v_n)\|_2^2 = \sum_{k\in K} |\tau(v_n u_k^*)|^2 \to 0$, donc d'après la question précédente pour tous $s, t \notin \Lambda$ on a $\langle u_s v_n u_t, v_n\rangle \to 0$. Le résultat est donc vrai pour tout a combinaison linéaire finie de u_s pour $s \notin \Lambda$, et en utilisant le théorème de Kaplansky on le montre pour tout $a \in P \ominus L\Lambda$.

(c) Par centralité, on a $av_n - v_n a \to 0$ et donc $\lim_n \langle a v_n a^*, v_n\rangle = \lim_n \langle v_n a a^*, v_n\rangle = \|a\|_2^2$, donc d'apèrs la question précédente a est nul.

Cet exercice est tiré de l'article de Boutonnet et Carderi [BC17]. Le résultat sur $L\mathbb{F}_2$ mentionné à la fin est du à Popa [Pop83], répondant à un problème de Kadison qui demandait si toute sous-algèbre maximale moyennable d'un facteur était un facteur.

Exercice 2. Ergodicité forte.

Soit une action pmp d'un groupe dénombrable Γ sur un espace de probabilité standard (X, μ). Une suite (A_n) de boréliens de X est dite **asymptotiquement invariante** si pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mu(A_n \triangle \gamma A_n) \to 0$. Elle est **asymptotiquement triviale** si $\mu(A_n)(1 - \mu(A_n)) \to 0$. Enfin, l'action est **fortement ergodique** si toutes les suites de boréliens asymptotiquement invariantes sont asymptotiquement triviales.

1. Montrer que toute action fortement ergodique est ergodique.
2. Montrer que toute suite asymptotiquement triviale est asymptotiquement invariante.
3. On va montrer que l'ergodicité forte est un invariant d'équivalence orbitale.
   (a) Montrer que (A_n) est asymptotiquement invariante ssi pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mu(\gamma A_n \setminus A_n) \to 0$. On pourra commencer par montrer que si A et B sont mesurables et $\mu(A) = \mu(B)$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(A \setminus B)$.
   (b) Montrer que si (A_n) est asymptotiquement invariante, alors en fait pour tout $T \in [\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}]$, on a $\mu(T(A_n) \triangle A_n) \to 0$.
   (c) En déduire que si deux actions pmp $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ sont orbitalement équivalentes, alors l'une est fortement ergodique ssi l'autre l'est.
4. On montre que les groupes moyennables n'ont pas d'actions fortement ergodiques
   (a) Montrer que si Γ est engendré par une partie S, alors une suite (A_n) est asymptotiquement invariante ssi pour tout $\gamma \in S$, $\mu(\gamma A_n \triangle A_n) \to 0$.
   (b) En utilisant le lemme de Rokhlin, montrer que les actions pmp de $\mathbb{Z}$ ne sont jamais fortement ergodiques.
   (c) Conclure que les actions pmp de groupes moyennables ne sont jamais fortement ergodiques.
5. Montrer que toutes les actions ergodiques de groupes ayant la propriété (T) sont fortement ergodiques. On rappelle qu'un groupe Γ a la propriété (T) si pour toute représentation unitaire $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, s'il existe une suite de vecteurs unitaires (ξ_n) tels que $\|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| \to 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, alors il existe un vecteur unitaire ξ tel que $\pi(\gamma)\xi = \xi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Solution de l'exercice 2.

1. Soit A mesurable Γ-invariant avec $0 < \mu(A) < 1$, alors la suite donnée par $A_n = A$ est clairement asymptotiquement invariante, mais elle n'est pas triviale, donc si l'action n'est pas ergodique, alors elle n'est pas fortement ergodique ce qui par contraposée donne le résultat voulu.
2. On remarque d'abord que $A\triangle\gamma A$ est inclus dans $A\cup\gamma A$ et contient $A\cap\gamma A = X\setminus((X\setminus A)\cup(X\setminus\gamma A)$. Donc comme γ préserve la mesure si $\mu(A) < \epsilon$, $\mu(A \triangle \gamma A) < 2\epsilon$ et si $\mu(A) > 1-\epsilon$ alors $\mu(A\triangle\gamma A) > 1-2\epsilon$. Donc toute suite asymptotiquement triviale est asymptotiquement invariante.
3. (a) On a $A \setminus B = A \setminus (A\cap B)$ et $B\setminus A = B \setminus (A \cap B)$ donc $\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(A\cap B)$ et $\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A\cap B)$. Ainsi si $\mu(A) = \mu(B)$ on a bien $\mu(B\setminus A) = \mu(A\setminus B)$.

   Comme $\gamma A\setminus A \subseteq A\triangle\gamma A$, il est clair que si on a une suite (A_n) asymptotiquement invariante, elle satisfait $\mu(\gamma A_n \setminus A_n) \to 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Réciproquement, on a $A_n \triangle \gamma A_n = (A_n \setminus \gamma A_n) \sqcup (\gamma A_n \setminus A_n)$ donc $\mu(\gamma A_n \triangle A_n) = \mu(\gamma A_n\setminus A_n) + \mu(A_n\setminus\gamma A_n) = 2\mu(\gamma A_n\setminus A_n)$ d'après la remarque, car $\mu(A_n) = \mu(\gamma A_n)$. On a donc bien la réciproque voulue.

   (b) Soit $T \in [\mathcal{R}_{\Gamma\curvearrowright X}]$, soit $\epsilon > 0$, on trouve par dénombrabilité de Γ un ensemble B de mesure $> 1-\epsilon/4$ et un ensemble $S \subset \Gamma$ fini tel que pour tout $x \in B$, il existe $\gamma \in S$ satisfaisant $T(x) = \gamma\cdot x$. Alors
$$T(A_n)\setminus A_n \subseteq X\setminus B \cup \bigcup_{\gamma\in S} \gamma A_n \setminus A_n.$$
   Ainsi d'après la question précédente et la continuité de l'union sur un ensemble fini, pour n suffisament grand on a $\mu(T(A_n)\setminus A_n) < 2(\epsilon/4)$, et donc par le raisonnement de la question précédente pour n suffisament grand $\mu(A_n \triangle T(A_n)) < \epsilon$ comme voulu.

   (c) Si S est une équivalence orbitale entre les actions, montrons que si $\Gamma \curvearrowright X$ n'est pas fortement ergodique alors $\Lambda \curvearrowright X$ non plus, ce qui par symétrie suffira pour conclure. Soit (A_n) asymptotiquement invariante non triviale pour $\Gamma \curvearrowright X$, alors comme S est une équivalence orbitale de $\Gamma\curvearrowright X$ vers $\Lambda\curvearrowright X$, on a que pour tout $\lambda\in\Lambda$, $S^{-1}\lambda S \in [\mathcal{R}_{\Gamma\curvearrowright X}]$, donc $\mu(S^{-1}\lambda S A_n \triangle A_n) \to 0$, ce qui comme S préserve la mesure se réécrit $\mu(\lambda S(A_n)\triangle S(A_n)) \to 0$. Donc la suite $(S(A_n))$ est Λ-asymptotiquement invariante, or S préserve la mesure donc $\mu(S(A_n))(1-\mu(S(A_n))) = \mu(A_n)(1-\mu(A_n))$ et donc la suite $(S(A_n))$ n'est pas asymptotiquement triviale, donc $\Lambda \curvearrowright X$ n'est pas fortement ergodique.
4. (a) L'action de Γ sur $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ est isométrique, donc pour tous $s_1, ..., s_k \in S^{\pm 1}$ on a
$$\begin{aligned}\mu(s_1\cdots s_k A \triangle A) &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \mu(s_1\cdots s_i A \triangle s_1\cdots s_{i+1}A)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\mu(A\triangle s_{i+1}A),\end{aligned}$$
   ce qui permet de conclure (c'est le même raisonnement que quand on montre que pour la moyennabilité, il suffit de trouver des parties presque invariantes par la partie génératrice finie).

   (b) D'après la question précédente, il suffit de trouver pour tout n une partie A_n telle que, $\mu(T(A_n)\setminus A_n) \to 0$ et $\mu(A_n) \to 1/2$ (pour être sûr qu'elle n'est pas asymptotiquement triviale). Par le lemme de Rokhlin, on trouve B_n telle que
$$\mu\left(X\setminus\left(\bigsqcup_{i=0}^{2n-1} T^i(B_n)\right)\right) < \frac{1}{n}$$
   Il suffit alors de poser $A_n = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} T^i(A)$.

   (c) C'est une conséquence immédiate de la question précédente, du théorème de Connes-Feldman-Weiss et de la question 3.

5. L'ergodicité de l'action nous dit que la représentation de Koopman sur $\mathrm{L}^2_0(X,\mu)$ n'a pas de vecteurs invariants. Supposons donnée une suite (A_n) asymptotiquement invariante. La projection orthogonale de la fonction caractéristique χ_{A_n} sur $\mathrm{L}^2_0(X,\mu)$ est égale à $\chi_{A_n}-\mu(A_n)\chi_X$. Si l'action n'est pas fortement ergodique, on a une suite (A_n) asymptotiquement invariante non triviale, quitte à prendre une sous-suite on peut supposer avoir un $\epsilon>0$ tel que $\mu(A_n)(1-\mu(A_n))\geqslant\epsilon$ pour tout n. Considérons le vecteur $\xi_n=\chi_{A_n}-\mu(A_n)\chi_X\in\mathrm{L}^2_0(X,\mu)$, alors $\|\xi_n\|^2=(1-\mu(A_n))\mu(A_n)^2+\mu(A_n)(1-\mu(A_n))^2=\mu(A_n)(1-\mu(A_n))$.
   De plus $\|\kappa(\gamma)\xi_n-\xi_n\|^2=\|\chi_{\gamma A_n}-\chi_{A_n}\|^2=\mu(A_n\bigtriangleup\gamma A_n)\to 0$, et comme $\|\xi_n\|^2\geqslant\epsilon$, on a également que si on pose $\xi'_n=\frac{1}{\|\xi_n\|}\xi_n$, alors $\|\kappa(\gamma)\xi'_n-\xi'_n\|^2\to 0$. D'après la propriété (T), la représentation de Koopman sur $\mathrm{L}^2_0(X,\mu)$ a alors un vecteur invariant non nul, ce qui contredit l'ergodicité de l'action.

La question 3 est la partie facile d'un théorème de Connes et Weiss qui caractérise les groupes ayant (T) comme ceux dont toutes les actions ergodiques sont fortement ergodiques [CW80].

Exercice 3. Groupes pleins L^1.

Soit (X,μ) un espace de probabilité standard, soit $T\in\mathrm{Aut}(X,\mu)$ une transformation apériodique (c'est-à-dire à orbites infinies). On désigne par $[T]$ le groupe plein de T, c'est-à-dire le groupes des $U\in\mathrm{Aut}(X,\mu)$ tels que pour tout $x\in X$, on ait $U(x)\in\{T^n(x)\colon n\in\mathbb{Z}\}$. Soit $U\in[T]$, son **cocycle** est l'application $c_U:X\to\mathbb{Z}$ définie uniquement par l'équation :

$$U(x)=T^{c_U(x)}(x)$$

On définit alors le **groupe plein $\mathbf{L}^1$** comme l'ensemble des $U\in[T]$ tels que $\int_X|c_U(x)|\,d\mu(x)<+\infty$. On le note $[T]_1$.

1. Montrer que si $U_1,U_2\in[T]$, alors pour tout $x\in X$ on a $c_{U_1U_2}(x)=c_{U_1}(U_2(x))+c_{U_2}(x)$.
2. En déduire que le groupe plein L^1 est bien un groupe.
3. Montrer que l'application $I:[T]_1\to\mathbb{R}$ définie par $I(U)=\int_X c_U(x)d\mu(x)$ est un morphisme de groupes.
4. On suppose T ergodique. Montrer que pour tout $A\subseteq X$ borélien de mesure non nulle, on a que $T_A\in[T]_1$, et $I(T_A)=1$. On pourra utiliser la décomposition de l'espace en tours de Kakutani-Rohlin.
5. Montrer que toute élément périodique $U\in[T]_1$ satisfait $I(U)=0$.
6. On suppose encore T ergodique.
   (a) Étant donné $A\subseteq X$, on définit son **temps de sortie** comme la quantité $\tau_A=\min\{|n|:T^n(x)\notin A\}$. Montrer que pour tout $\epsilon>0$ et tout $M>0$, il existe $A\subseteq X$ tel que $\mu(A)<\epsilon$ et $\int_A\tau_A(x)d\mu(x)\geqslant M$. On pourra utiliser le lemme de Rohlin.
   (b) En déduire qu'il existe $A\subseteq X$ de mesure $\leqslant 1/2$ tel que $\int_A\tau_A(x)d\mu(x)=+\infty$.
   (c) Montrer que pour un tel A, il ne peut alors exister de $U\in[T]_1$ tel que $U(A)$ soit disjoint de A. En quoi ceci distingue-t-il $[T]_1$ de $[T]$?
   (d) Montrer que le noyau de I n'est pas un groupe simple[1] (c'est-à-dire qu'il admet des sous groupes distingués non triviaux). On pourra montrer que pour A choisi comme dans la question (b), la transformation $T_AT_{X\setminus A}^{-1}$ ne peut être le produit d'un nombre fini de conjugués d'une involution dans le groupe plein L^1 de support disjoint de A, en considérant les supports de ses conjugués.

Solution de l'exercice 3.

1. Par contre, un théorème de Fathi garantit que le groupe plein de T est un groupe simple.

1. On a $U_1U_2(x) = T^{c_{U_1}(U_2(x))}(U_2(x)) = T^{c_{U_1}(U_2(x))}(T^{c_{U_2}(x)}(x)) = T^{c_{U_1}(U_2(x))+c_{U_2}(x)}(x)$.
2. Supposons $U_1, U_2 \in [T]_1$, alors
$$\begin{aligned}\int_X |c_{U_1U_2}(x)| &\leqslant \int_X |c_{U_1}(U_2(x))|\, d\mu(x) + \int_X |c_{U_2}(x)|\, d\mu(x)\\ &= \int_X |c_{U_1}(x)|\, d\mu(x) + \int_X \left|c_{U_2(x)}\right| d\mu(x)\\ &< +\infty,\end{aligned}$$
où l'on a utilisé que U_2 préserve la mesure. Pour la stabilité par inverse, on remarque que la question précédente donne aussi $c_{U^{-1}}(x) = -c_U(U^{-1}(x))$ d'où le résultat puisque U^{-1} préserve la mesure.
3. On a
$$\begin{aligned}I(U_1U_2) = \int_X c_{U_1U_2}(x)d\mu(x) &= \int_X c_{U_1}(U_2(x))d\mu(x) + \int_X c_{U_2}(x)d\mu(x)\\ &= \int_X c_{U_1}(x)d\mu(x) + \int_X c_{U_2}(x)d\mu(x)\\ &= I(U_1) + I(U_2)\end{aligned}$$
comme voulu.
4. On note τ le temps de retour sur A (avec $\tau(x) = 0$ si $x \notin A$), alors si $A_n = \{x \in A : \tau(x) = n\}$, les A_n partitionnent A. Comme T est ergodique on a que A intersecte presque toute T-orbite, et donc on a d'après le cours une partition de l'espace
$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=0}^{n-1} T^i(A_n).$$
De plus on a par définition $c_{T_A}(x) = \tau(x)$ donc
$$\begin{aligned}\int_X c_{T_A}(x)d\mu(x) &= \int_A \tau(x)d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} \tau(x)d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\bigsqcup_{i=0}^{n-1} T^i(A_n))\\ &= \mu(X) = 1.\end{aligned}$$
5. Soit U périodique, soit A un domaine fondamental de U (borélien qui intersecte chaque U-orbite en un seul point, obtenu par exemple en prenant le minimum de chaque orbite pour un ordre total borélien sur X). Soit alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'ensemble des points de A dont la U orbite est de cardinalité n. Alors on a $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=0}^{n-1} U^i(A_n)$. Mais si $x \in A_n$, on a $0 = c_{U^n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_U(U^i(x)) = 0$ (d'après 1) donc $\int_{A_n} c_{U^n}(x) = 0$, mais comme U préserve la mesure, la formule précédente nous donne
$$\int_{A_n} c_{U^n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{U^i(A_n)} c_U(x) = 0.$$
En utilisant la décomposition $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=0}^{n-1} U^i(A_n)$, on obtient le résultat voulu.

6. (a) Il suffit de construire une suite d'ensembles B_n dont la mesure tend vers 0 et dont l'intégrale du temps de sortie tend vers $+\infty$. Pour ce faire, appliquons le lemme de Rohlin pour $\epsilon = 1/2$ et $N = 2n^2$, où $n \geqslant 2$, on obtient A_n dont la mesure est au moins $\frac{1}{4n^2}$ et dont les $2n^2$ premiers translatés sont disjoints. Soit $C_n \subseteq A_n$ de mesure $\frac{1}{n^3}$, considérons l'ensemble $B_n = \bigsqcup_{i=0}^{2n^2-1} T^i(C_n)$ de mesure au plus $\frac{2}{n}$, alors l'intégrale du temps de sortie pour B_n vaut au moins
$$\sum_{i=0}^{n^2-1} i \times 2\mu(C_n) = \frac{n^2(n^2-1)}{2} \times \frac{1}{n^3} \to +\infty$$
comme voulu.

(b) Remarquons que $\tau_{A\cup B} \geqslant \max(\tau_A, \tau_B)$, donc il suffit de prendre une réunion d'ensembles B_n avec $\mu(B_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$ et $\int_X \tau_{B_n} \to +\infty$.

(c) Si $U(A)$ disjoint de A, par définition du temps de sortie on doit avoir $\tau_A \leqslant |c_U|$, ce qui contredit l'intégrabilité de c_U. Un tel U existe par contre dans le groupe plein de T par ergodicité, comme on l'a vu en cours.

(d) On prend A comme dans la question (b), d'après les questions 3 et 4, la transformation $T_A T_{X\setminus A}^{-1}$ est bien d'indice 0. Son support est X tout entier. Comme T est ergodique, on trouve $B \subseteq X \setminus A$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(B)$ est disjoint à la fois de B et de A. Soit alors U l'involution définie par :
$$U(x) = \begin{cases} T^n(x) & \text{si } x \in B, \\ T^{-n}(x) & \text{si } x \in T^n(B), \\ x & \text{dans les cas restants.} \end{cases}$$
Alors $I(U) = 0$, et le support de U est disjoint de A. Maintenant si le noyau de I était simple, alors $T_A T_{X\setminus A}^{-1}$ serait égal à un produit fini de conjugués de U par des éléments $T_1, ..., T_n$ du noyau de I (en particulier du groupe plein L^1) :
$$T_A T_{X\setminus A}^{-1} = T_1 U T_1^{-1} \cdots T_n U T_n^{-1}.$$
Alors $X = \operatorname{supp} T_A T_{X\setminus A}^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \operatorname{supp}\,(T_i U T_i^{-1}) = \bigcup_{i=1}^n T_i(\operatorname{supp} U)$, en particulier A est recouvert par un nombre fini de translatés de supp U par des éléments du groupe plein L^1 de T. Alors pour tout $x \in A$, il existe i tel que $\tau_A(x) \leqslant |c_{T_i}(x)|$, ce qui contredit la non intégrabilité de τ_A.

L'exercice est tiré de l'article [LM18], la question 4 est en fait un théorème classique de Kac [Kac47].

Références

[BC17] Rémi Boutonnet and Alessandro Carderi. Maximal amenable subalgebras of von Neumann algebras associated with hyperbolic groups. *Mathematische Annalen*, 367(3) :1199–1216, April 2017. `doi:10.1007/s00208-016-1419-9`.

[CW80] A. Connes and B. Weiss. Property T and asymptotically invariant sequences. *Israel Journal of Mathematics*, 37(3) :209–210, September 1980. `doi:10.1007/BF02760962`.

[Kac47] M. Kac. On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(10) :1002–1010, October 1947.

[LM18] François Le Maître. On a measurable analogue of small topological full groups. *Advances in Mathematics*, 332 :235–286, July 2018. `arXiv:1608.07399`, `doi:10.1016/j.aim.2018.05.008`.

[Pop83] Sorin Popa. Maximal injective subalgebras in factors associated with free groups. *Advances in Mathematics*, 50(1) :27–48, October 1983. `doi:10.1016/0001-8708(83)90033-6`.