TD 1 – Algèbres de Banach

Exercice 1. Exemple fondamental de C^*-algèbre.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. Montrer que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ muni de la norme usuelle et de l'involution $T \mapsto T^*$ est une C^*-algèbre, c'est-à-dire une algèbre de Banach où pour tous $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^*a^*$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et surtout $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Exercice 2. Gelfand-Mazur réel.
Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach.

1. Soit $x \in A$, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x + a1)^2 + b^2 1$ est non inversible.

On suppose désormais que tout élément non nul de A est inversible

2. Montrer que si l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto t1 \in A$ n'est pas surjective, alors il existe un élément $i \in A$ tel que $i^2 = -1$.
3. On fixe $i \in A$ tel que $i^2 = -1$. Montrer que si $x \in A$ commute à i, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = a1 + bi$.
4. Posons $C = \{x \in A : ix = xi\}$ et $D = \{x \in A : ix = -xi\}$. Montrer que $A = C \oplus D$, et que pour tout $y \in D$ non nul on a $D = yC$.
5. En déduire que si A est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach où tout élément non nul est inversible, alors A est isomorphe (en tant qu'algèbre de Banach) à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou au corps (non commutatif) des quaternions $\mathbb{H}$.

Exercice 3. Spectre et caractères.
Dans cet exercice, A est une algèbre de Banach commutative unifère. Un **caractère** de A est un morphisme d'algèbre unifère continu $\chi : A \to \mathbb{C}$. Un **idéal** I de A est un sous-ensemble strict $I \subset A$ tel que $AI = IA = I$.

1. Montrer qu'un idéal ne peut pas contenir d'élément inversible.
2. Montrer que tout idéal est contenu dans un idéal maximal (pour l'inclusion).
3. Montrer que si I est un idéal maximal, alors I est fermé.
4. Montrer que si I est un idéal fermé, alors le quotient A/I est une algèbre de Banach pour la norme quotient.
5. En déduire que pour tout $x \in A$, on a
$$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\chi(x) \colon \chi \text{ caractère de } A\}$$

Exercice 4. Algèbre unifère et norme de 1.
Soit A une algèbre unifère qui soit un espace de Banach pour une norme $\|\cdot\|$ et telle que $\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ pour tous $x, y \in A$. Montrer qu'il existe une autre norme $\|\cdot\|'$ équivalente à $\|\cdot\|$ telle que $\|1\|' = 1$, c'est-à-dire telle que A munie de $\|\cdot\|'$ soit une algèbre de Banach. On pourra utiliser l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(A)$ des applications linéaires continues de l'espace de Banach A dans lui même.

Exercice 5. Une application de l'exercice 3.

1. Soient A, une algèbre de Banach unifère, et a et b deux éléments de A, qui commutent. Montrer que $\mathrm{Sp}_A a + b \subset \mathrm{Sp}_A a + \mathrm{Sp}_A b$ et $\mathrm{Sp}_A ab \subset (\mathrm{Sp}_A a)(\mathrm{Sp}_A b)$.
2. Soient a et b deux éléments d'une algèbre de Banach A tels que $\mathrm{Sp}_A a \cap \mathrm{Sp}_A b = \emptyset$. Montrer que l'application $\varphi_{a,b} : x \mapsto ax - xb$ est inversible dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(A)$.