# TD 2 – Spectre et $C^*$-algèbres

**Exercice 1. Un lemme utile.**

1. Soit $A$ un anneau, montrer que si $x, y \in A$ satisfont que $1 - xy$ est inversible alors $1 - yx$ est inversible aussi.
2. En déduire que pour toute algèbre de Banach $A$, $\mathrm{Sp}_A(xy) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}_A(yx) \cup \{0\}$.

**Exercice 2. L'application naturelle $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$ est loin d'être un plongement.**
Notons $j : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$ l'application qui à toute fonction continue $f$ associe sa classe dans $L^2$.
Soit $E$ un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ tel que $j(E)$ soit un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$.

1. Démontrer que la réciproque $\varphi : j(E) \to E$ de la restriction de $j$ est continue. En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\|f\|_\infty \leq M\|j(f)\|_2$.
2. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, il existe un unique élément $g_t \in j(E)$ tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\langle g_t | j(f) \rangle = f(t)$. Démontrer que $\|g_t\|_2 \leq M$.
3. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une suite d'éléments de $E$ telle que $(j(f_1), \dots, j(f_n))$ soit un système orthonormal de $j(E)$. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2 \leq \|g_t\|_2^2$.
4. En déduire que la dimension de $E$ est finie.

**Exercice 3. Opérateurs normaux et spectre.**
Soit $x$ un opérateur d'un espace hilbertien $H$.

1. Démontrer que le noyau de $x^*$ est l'orthogonal de l'image de $x$.
2. Démontrer que si $x$ est normal et surjectif, il est bijectif.

Pour les questions qui suivent, on suppose que $x$ est normal.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$ si et seulement $\inf\{\|x\xi - \lambda\xi\| / \|\xi\|,\ \xi \neq 0\} = 0$.
4. Démontrer que $\|x\| = \sup\{|\langle \xi, x\xi \rangle|, \xi \in B\}$, où $B$ est la boule unité de $H$.
5. Supposons que l'application $\xi \mapsto |\langle \xi, x\xi \rangle|$ atteint son maximum en un point $\xi \in B$. Démontrer que $\xi$ est un vecteur propre de $x$.

**Exercice 4. $C^*$-algèbres abéliennes et flot universel.**
Soit $\Gamma$ un groupe discret.

1. Montrer que $\Gamma$ agit par automorphisme sur $\ell^\infty(\Gamma)$ par $\gamma \cdot f(g) = f(\gamma^{-1} g)$.
2. En déduire que $\Gamma$ agit par homéomorphisme sur le spectre de $\ell^\infty(\Gamma)$, que l'on note $\beta\Gamma$.
3. Montrer que l'application $\iota : \Gamma \to \beta\Gamma$ qui à $\gamma \in \Gamma$ associe $\iota(\gamma) : f \mapsto f(\gamma)$ est injective et d'image dense.
4. En déduire que $\Gamma \curvearrowright \beta\Gamma$ admet une orbite dense.
5. Montrer que $\Gamma \curvearrowright \beta\Gamma$ satisfait la propriété universelle suivante : pour toute action continue $\Gamma \curvearrowright X$ sur un espace compact avec un point $x_0 \in X$ d'orbite dense, il existe une unique application $\beta\Gamma \to X$ qui est $\Gamma$-équivariante et envoie $\iota(e)$ sur $x_0$.
6. Montrer que $\Gamma \curvearrowright \beta\Gamma$ est libre.
7. En déduire que si $\Gamma$ est dénombrable, alors $\Gamma$ admet une action libre sur un compact métrisable.

*Les questions 1 à 5 sont valables plus généralement pour les groupes topologiques agissant continûment sur des espaces compacts. La bonne $C^*$-algèbre à considérer pour remplacer $\ell^\infty(\Gamma)$ est celle des fonctions bornées uniformément continues à droite, notée $RUCB(G)$ en anglais. La question 6 se généralise alors aux groupes localement compacts. Il existe cependant des groupes topologiques (comme $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ muni de la topologie forte) satisfaisant une propriété opposée : toutes leurs actions continues sur des compacts admettent un point fixe ! On pourra consulter* [Pes06] *pour plus d'informations.*

## Références

[Pes06] Vladimir Pestov. *Dynamics of Infinite-Dimensional Groups*, volume 40 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.