TD 3 – C^*-algèbres et spectre, le retour

Exercice 1. Unitarisation de C^*-algèbre.
Soit A une C^*-algèbre non nécessairement unifère.

1. Montrer que $\lambda : A \to \mathcal{B}(A)$ définie par $\lambda(a)b = ab$ est une isométrie.
2. On note $\tilde{A}$ l'algèbre engendrée par $\lambda(A)$ et l'identité sur A, que l'on note 1. Montrer que l'application $*$ donnée par
$$(a + \lambda 1)^* = a^* + \bar{\lambda} 1$$
est bien définie et involutive.
3. Montrer que $\tilde{A}$ est une C^* algèbre pour la norme induite par $\mathcal{B}(A)$.

Exercice 2. Caractérisation des autoadjoints et positifs dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

1. Montrer que $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est autoadjoint ssi pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a $\langle x\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est positif ssi pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a $\langle x\xi, \xi\rangle \geqslant 0$.

Exercice 3. Continuité du calcul fonctionnel continu.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$, soit A une C^*-algèbre et
$$A_K = \{x \in A \colon x \text{ est normal et } \operatorname{Sp}(x) \subseteq K\}.$$
Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, l'application $a \in A_K \mapsto f(a) \in A$ est continue pour la norme.

Exercice 4. Opérateur de décalage bilatéral.
Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, on définit l'opérateur de décalage D par $D(f) : n \mapsto f(n-1)$ pour tout $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

(1) Déterminer l'adjoint de D.
(2) L'opérateur D est-il normal ?
(3) Déterminer le spectre de D et de D^*.

Exercice 5. Opérateur de décalage unilatéral.
Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, on définit l'opérateur de décalage D par
$$D(f) : n \mapsto \begin{cases} f(n-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$
pour tout $f \in \ell^2(\mathbb{N})$.

(1) Déterminer l'adjoint de D.
(2) L'opérateur D est-il normal ?
(3) Déterminer le spectre de D et de D^*.