TD 4 – Propriété de Powers

Exercice 1. Propriété de Dixmier.
Soit A une C^*-algèbre unitale. Une **trace** sur A est un état τ tel que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $a, b \in A$. Une **trace** sur A est un état τ tel que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $a, b \in A$.

1. Montre que si Γ est un groupe discret, l'état τ sur $C_r^*(\Gamma)$ donné par $\tau(a) = \langle a\delta_e, \delta_e \rangle$ est une trace.

On dit que A vérifie la **propriété de Dixmier** si pour tout $a \in A$, l'adhérence de l'enveloppe convexe des uau^* pour $u \in \mathcal{U}(A)$ intersecte le centre de A.

2. Montrer que si le centre de A est trivial, A vérifie la propriété de Dixmier et A possède une trace fidèle τ, alors A est simple (elle n'a pas d'idéal bilatère fermé non trivial) et τ est l'unique trace sur A.

Exercice 2. Propriété de Powers.
Un groupe non trivial Γ a la **propriété de Powers** si étant données une partie finie $F \subseteq \Gamma \setminus \{1\}$ et $n \geqslant 1$, on peut trouver $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ ainsi qu'une partition $\Gamma = C \sqcup D$ tels que

— $fC \cap C = \emptyset$ pour tout $f \in F$ et

— $\gamma_j D \cap \gamma_i D = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.

1. Montrer que tout groupe discret avec la propriété de Powers ne peut être moyennable.
2. On va voir que si Γ a la propriété de Powers, alors $C_r^*(\Gamma)$ est simple. Montrer que si Γ est moyennable, $C_r^*(\Gamma)$ ne peut être simple.
3. Montrer que tout groupe infini avec la propriété de Powers est à classes de conjugaison infinies.
4. Montrer que $\mathbb{F}_2$ satisfait la propriété de Powers.

Exercice 3. Un lemme utile.
Soit $(x_i)_{i=1}^N$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de norme au plus 1, et $(\mathcal{H}_i)_{i=1}^N$ une famille de sous espaces fermés de $\mathcal{H}$ deux à deux orthogonaux. On suppose que pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, on a $x_i(\mathcal{H}_i^\perp) \subseteq \mathcal{H}_i$. Montrer que $\left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{N}}$. On pourra montrer que si on a N opérateurs $y_1, ..., y_N$ de norme au plus un et d'images deux à deux orthogonales, alors $\left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Exercice 4. Retour sur la propriété de Powers.
Soit Γ un groupe dénombrable vérifiant la propriété de Powers.

1. Montrer que pour tout $a \in C_r^*(\Gamma)$, l'adhérence de l'enveloppe convexe des $u_\gamma a u_\gamma^*$ contient $\tau(a)1$. On pourra commencer par le cas où $\tau(a) = 0$ et $a \in \mathbb{C}[\Gamma]$.
2. En déduire que $C_r^*(\Gamma)$ est simple, et que $C_r^*(\Gamma)$ a une unique trace.