TD 6 – Autour des opérateurs compacts

Exercice 1. Opérateurs compacts.
On travaille dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie. On dit que x est **compact** si $x(\mathcal{H})_1$ est compacte pour la norme, où $(\mathcal{H})_1$ désigne la boule unité de $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs dont l'image est de dimension finie, et $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts.

1. Montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un idéal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
3. Montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est une C^*-algèbre.
4. Montrer que si $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ est normal, alors il est diagonalisable, ses espaces propres sont de dimension finie, et ses valeurs propres tendent vers zéro.

Exercice 2. Trace sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert dimension infinie, soit (e_n) une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Pour $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positif, on définit $\mathrm{Tr}(x) = \sum_n \langle xe_n, e_n \rangle$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(x^*x) = \mathrm{Tr}(xx^*)$ pour tout $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
2. Montrer que pour tout x positif, $\mathrm{Tr}(uxu^*) = \mathrm{Tr}(x)$.
3. En déduire que Tr est indépendante du choix de la base orthonormale (e_n), et que $\|x\| \leqslant \mathrm{Tr}(x)$ pour tout x positif.
4. Soit $p \geqslant 1$. Montrer que si $\mathrm{Tr}(|x|^p) < +\infty$, alors x est compact.

Exercice 3. Opérateurs à trace et Hilbert-Schmidt.
On définit les espaces suivants : $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ est l'espace vectoriel engendré par les opérateurs positifs tels que $\mathrm{Tr}(x) < +\infty$, et $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ est l'espace vectoriel engendré par les opérateurs positifs tels que $\mathrm{Tr}(x^*x) < +\infty$.

1. Montrer que Tr s'étend uniquement en une application linéaire $\mathrm{Tr} : \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En déduire que $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon \mathrm{Tr}(|x|) < +\infty\}$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et que
$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$
4. Montrer que $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle x, y\rangle_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{Tr}(x^*y)$ et que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ y est dense.
5. Montrer que $|\mathrm{Tr}(xy)| \leqslant \|x\| \,\mathrm{Tr}(|y|)$ pour tous $y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ et $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
6. Montrer que pour tous $x, y \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$, on a $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$. Montrer que cette identité est aussi vraie pour $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.
7. Montrer que $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach pour la norme $\|x\|_1 = \mathrm{Tr}(|x|)$, et que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ y est dense.
8. Montrer que la forme bilinéaire $\varphi(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$ implémente une dualité entre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, puis entre $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.