
TD 1 – C^* -algèbres non unifières

Exercice 1. Unitarisation de C^* -algèbre.

Soit A une C^* -algèbre non nécessairement unifière.

1. Montrer que $\lambda : A \rightarrow \mathcal{B}(A)$ définie par $\lambda(a)b = ab$ est une isométrie.
2. On note \tilde{A} l'algèbre engendrée par $\lambda(A)$ et l'identité sur A , que l'on note 1. Montrer que l'application $*$ donnée par

$$(a + \lambda 1)^* = a^* + \bar{\lambda} 1$$

est bien définie et involutive.

3. Montrer que \tilde{A} est une C^* algèbre pour la norme induite par $\mathcal{B}(A)$.

Exercice 2. Calcul fonctionnel sans unité.

Soit A une C^* -algèbre non unifière. Soit \tilde{A} son unitarisation telle que définie à l'exercice précédent. Etant donnée $F \subseteq \tilde{A}$, on note $C^*(F)$ la plus petite C^* -algèbre contenant F . Soit $a \in A$ normal, soit $\psi : C^*(1, a) \rightarrow \mathcal{C}(\text{Sp}(a))$ l'isomorphisme de C^* -algèbre fourni par le calcul fonctionnel. Qu'elle est l'image de $C^*(a) \subseteq A$ par ψ ?

Exercice 3. Unités approchées.

Soit A une C^* -algèbre non unifière. On cherche une suite généralisée d'unités approchées pour A , c'est à dire $(e_n)_n$ telle que $0 \leq e_n < 1$, $e_m \leq e_n$ si $m \leq n$ et $\lim_n \|a - ae_n\| = 0$ pour tout $a \in A$.

1. Montrer que si on a une telle suite, alors on a également $\lim_n \|a - e_n a\| = 0$ pour tout $a \in A$

On va plus généralement montrer que si I est un idéal bilatère dans A , on peut trouver une suite généralisée dans I qui satisfait à la fois $\lim_n \|a - ae_n\| = 0$ pour tout $a \in \tilde{I}$. On fixe donc un tel idéal I . On travaille dans l'unitarisation \tilde{A} de A dont on note 1 l'unité.

2. Montrer que I reste un idéal de \tilde{A} .
3. Montrer que l'ensemble $(I_+)_1$ des éléments positifs de I qui sont de norme < 1 est filtrant. On pourra utiliser la fonction $x \mapsto x(1+x)^{-1}$.
4. Montrer que si $x \in I_+$ et $0 \leq e \leq 1$, alors

$$\|x - xe\|^2 \leq \|x(1-e)x\|.$$

5. Montrer que la suite généralisée $(e_n)_{n \in (I_+)_1}$ définie par $e_n = n$ satisfait que pour tout $x \in I_+$, $\lim_n \|x(1-e_n)x\| = 0$.
6. Conclure. On pourra commencer par remarquer que si $x \in I$,

$$\|x - xe\|^2 = \|(1-e)x^*x(1-e)\|.$$

7. Montrer que quand A est séparable, on peut en fait trouver une unité approchée dans I indexée par \mathbb{N} .

Solution de l'exercice 3.

1. Le calcul est direct une fois qu'on se souvient que $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}1$.
2. On remarque d'abord que I_+ est filtrant : si $0 \leq a$ et $0 \leq b$ alors par définition $a \leq a+b$ et $b \leq a+b$, et si $a, b \in I$ alors $a+b \in I$. La clé est alors de montrer que la fonction en question (à valeur dans I puisque ce dernier est un idéal) est croissante : si $0 \leq a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. Pour cela on remarque que $f(x) = 1 - (1+x)^{-1}$, et on se souvient que le passage à l'inverse inverse l'ordre pour les éléments positifs inversibles.
3. Utiliser la C^* identité puis le fait que $x(1-e)^2x \leq x(1-e)x$.

- On commence par trouver une suite e_n qui va bien en faisant un calcul fonctionnel bien choisi pour rester dans I : on prend une fonction f_n qui envoie 0 sur 0 donnée par $f_n(x) = nx(1+nx)^{-1}$.

Exercice 4. Idéaux et quotients.

Soit A une C^* -algèbre.

- Montrer que tout idéal bilatère fermé de A est stable par $*$.
- Montrer que si I est un idéal bilatère fermé de A , alors A/I est une C^* -algèbre pour la norme quotient. On pourra d'abord montrer que pour tout $x \in A$,

$$\|x\|_{A/I} = \inf_{e \in (I_+)_1} \|x - xe\|$$

Solution de l'exercice 4.

- On utilise le truc précédent : $\|a^* - ea^*\| = \|a - ae\| \rightarrow 0$ et $ea^* \in I$ donc par fermeture $a^* \in I$.
- Il est clair que $\|x\|_{A/I} \leq \|x - xe\|$ pour tout $e \in I$ puisque I est un idéal. Dans l'autre sens : si (e_n) est une suite approchée de l'identité, $x \in A$ et $y \in I$ alors comme $0 \leq 1 - e_n \leq 1$ on a $\|1 - e_n\| \leq 1$, et donc

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\geq \|(x + y)(1 - e_n)\| \\ &\geq \liminf_n \|x - xe_n + y - ye_n\| \\ &= \liminf_n \|x - xe_n\| \end{aligned}$$

car le second terme tend vers zéro. Ensuite, il suffit de montrer l'inégalité $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$, mais cette dernière découle du fait que $\|x - xe\|^2 = \|x(1 - e)\|^2 = \|(1 - e)x^*x(1 - e)\| \leq \|x^*x(1 - e)\| = \|x^*x - x^*xe\|$.

Exercice 5. Algèbre des multiplicateurs.

Soit $A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une C^* -algèbre non dégénérée (il n'y a pas de vecteur ξ non nul tel que $A\xi = \{0\}$).

- Montrer que si (e_n) est une suite d'unités approchées pour A , alors (e_n) converge fortement vers l'identité. On pourra commencer par montrer qu'elle converge faiblement vers un certain $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- Montrer que si $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfait $xa = 0$ pour tout $a \in A$ alors $x = 0$, et que si $ax = 0$ pour tout $a \in A$ on a également $x = 0$.

L'algèbre des multiplicateurs de A est l'ensemble des $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $xA \subseteq A$ et $Ax \subseteq A$. On le note $\mathcal{M}(A)$.

- Montrer que $\mathcal{M}(A)$ est une C^* -algèbre unitale qui contient A et qui est contenue dans A'' , et que A en est un idéal essentiel : il intersecte non trivialement tout autre idéal non nul.

Un double centralisateur pour A est une paire (L, R) de fonctions $L, R : A \rightarrow A$ telles que

$$R(x)y = xL(y)$$

pour tous $x, y \in A$. On note $\mathcal{DC}(A)$ l'ensemble des doubles centralisateurs.

- Montrer que si A est un idéal d'une C^* -algèbre B et $b \in B$, on peut naturellement associer à $b \in B$ un double centralisateur (L_b, R_b) .
- Montrer que si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$, alors pour tous $x, y \in A$ on a $L(xy) = L(x)y$ et $R(xy) = xR(y)$, et L, R sont linéaires. On pourra utiliser une suite d'unités approchée pour A .
- Montrer que si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$, alors L et R sont bornées de même norme. On pourra utiliser la question 2.
- Pour $T : A \rightarrow A$, on note $T^* : x \mapsto (T(x^*))^*$. Montrer que $(L, R) \mapsto (R^*, L^*)$ définit une involution de $\mathcal{DC}(A)$ qui en fait une $*$ -algèbre normée. On définira précisément la structure d'algèbre et la norme.

- Montrer que l'application $x \mapsto (L_x, R_x)$ de $\mathcal{M}(A)$ dans $\mathcal{DC}(A)$ est un *-isomorphisme isométrique. En particulier, $\mathcal{M}(A)$ est une C^* -algèbre, et $\mathcal{DC}(A)$ ne dépend pas de la représentation non dégénérée de A choisie au début.

Solution de l'exercice 5.

- On a une limite faible d'une sous-suite, notons la x Pour tout ξ , la suite $\langle e_n \xi, \xi \rangle$ est croissante bornée, elle a une limite, cette limite doit être $\langle x \xi, \xi \rangle$, d'où la convergence faible ! Mais $e_n = \sqrt{e_n^2}$ donc on trouve que $\|e_n \xi\|^2 \rightarrow \|x \xi\|^2$ donc $\|e_n \xi - x \xi\|^2 = \|e_n \xi\|^2 + \|x \xi\|^2 - 2\Re \langle e_n \xi, x \xi \rangle \rightarrow 0$ ce qui finit la preuve de la convergence forte vers x . On a ensuite par continuité du produit sur la boule unité que $x^2 = x$ et $x^* = x$ donc x est une projection, qu'on note dorénavant p . On a aussi, toujours par continuité, que $px = xp = x$ pour tout $x \in A$. En particulier pour tout $x \in A$, $x(1 - p) = 0$, ce qui dit précisément que les vecteurs ξ dans $(1 - p)\mathcal{H}$ satisfont $A\xi = 0$. Ainsi $p = 1$.
- Clair par la première question : $xe_n \rightarrow x$ fortement.
- Comme A est fermée, si $xA \not\subseteq A$ on trouve $a \in A$ tel que $\|xa - A\| > 0$, ce qui reste vrai pour x' proche de x , donc \mathcal{A} est fermée pour la norme. Soit $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, si $xa \in A$ et $ax \in A$ pour tout a , alors $a^*x^* \in A$ et $x^*a^* \in A$ pour tout $a \in A$, donc x^* est aussi un multiplicateur. On conclut que $\mathcal{M}(A)$ est une C^* -algèbre. Si $x \in \mathcal{M}(A)$, $xe_n \in A$ pour tout n et $xe_n \rightarrow x$ fortement donc $x \in A'$. Reste à voir que A est un idéal essentiel (il intersecte tout autre idéal non trivial non trivialement). Soit donc I un idéal de $\mathcal{M}(A)$, supposons $A \cap I = \{0\}$. Si $x \in I$, pour tout $y \in A$, on a $xy \in A \cap I = 0$, donc par la question précédente $x = 0$.
- L_a est bien sûr la multiplication à gauche par a , R_a la multiplication à droite, on a bien $R_a(x)y = xay = xL_a(y)$.
- Regardons ce qui se passe quand x est une unité approchée :

$$R(xy)e_n = xyL(e_n) = x(yL(e_n)) = xR(y)e_n \rightarrow xR(y),$$

tandis que $R(xy)e_n \rightarrow R(xy)$. Similaire pour L .

- De même $R(x + \lambda y)e_n = (x + \lambda y)L(e_n) = R(x)e_n + \lambda R(y)e_n$, en passant à la limite on a la linéarité. Pour montrer que R est borné, il suffit de montrer que son graphe est fermé. Soit $x_n \rightarrow x$ avec $R(x_n) \rightarrow y$. Alors pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} \|R(x)a - ya\| &\leq \|R(x)a - R(x_n)a\| + \|R(x_n)a - ya\| \\ &\leq \|L(a)\| \|x - x_n\| + \|a\| \|R(x_n) - y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On conclut que $(R(x) - y)a = 0$ pour tout $a \in A$, donc $R(x) = y$ d'après la question 2. Pour montrer que L est borné, c'est tout pareil mais dans l'autre sens.

- Pour vérifier l'isométrie, on remarque d'abord que $\|L_x\| \leq \|x\|$, puis on montre que $\|xe_n\| \rightarrow \|x\|$: en effet $xe_n \rightarrow x$ fortement et la norme est semi-continue inférieurement pour la topologie forte (à la main : on écrit que la norme de x est presque réalisée par $\|x\xi\|$ qui est très proche de $\|xe_n\xi\|$). Reste à voir la surjectivité.

Soit (L, R) un double centralisateur. La suite des $L(e_n)$ et des $R(e_n)$ est bornée, quitte à extraire elles convergent faiblement vers x_L et x_R respectivement. Si $y, z \in A$ on a yx_Rz est par continuité séparée du produit la limite faible des $yR(e_n)z = R(ye_n)z \rightarrow yR(z) = L(y)z = yx_Lz$ par le même argument. D'où $x_L = x_R = x$. Et x était donc le seul point d'accumulation possible : les suites convergent faiblement. Maintenant, $L(a)$ est la limite en norme des $L(e_n a)$ puisque L est borné (en particulier leur limite faible), or $L(e_n a) = L(e_n)a \rightarrow xa$ faiblement donc L coïncide avec la multiplication à gauche par x , et de même $R(a) = \lim_n R(ae_n) = \lim_n aR(e_n) = ax$.