TD 1 – C^*-algèbres non unifères

Exercice 1. Unitarisation de C^*-algèbre.
Soit A une C^*-algèbre non nécessairement unifère.

1. Montrer que $\lambda : A \to \mathcal{B}(A)$ définie par $\lambda(a)b = ab$ est une isométrie.
2. On note $\tilde{A}$ l'algèbre engendrée par $\lambda(A)$ et l'identité sur A, que l'on note 1. Montrer que l'application $*$ donnée par
$$(a + \lambda 1)^* = a^* + \bar{\lambda}1$$
est bien définie et involutive.
3. Montrer que $\tilde{A}$ est une C^* algèbre pour la norme induite par $\mathcal{B}(A)$.

Exercice 2. Calcul fonctionnel sans unité.
Soit A une C^*-algèbre non unifère. Soit $\tilde{A}$ son unitarisation telle que définie à l'exercice précédent. Etant donnée $F \subseteq \tilde{A}$, on note $C^*(F)$ la plus petite C^*-algèbre contenant F. Soit $a \in A$ normal, soit $\psi : C^*(1, a) \to \mathcal{C}(\mathrm{Sp}(a))$ l'isomorphisme de C^*-algèbre fourni par le calcul fonctionnel. Qu'elle est l'image de $C^*(a) \subseteq A$ par ψ ?

Exercice 3. Unités approchées.
Soit A une C^*-algèbre non unifère. On cherche une suite généralisée d'unités approchées pour A, c'est à dire $(e_n)_n$ telle que $0 \leqslant e_n < 1$, $e_m \leqslant e_n$ si $m \leqslant n$ et $\lim_n \|a - ae_n\| = 0$ pour tout $a \in A$.

1. Montrer que si on a une telle suite, alors on a également $\lim_n \|a - e_n a\| = 0$ pour tout $a \in A$

On va plus généralement montrer que si I est un idéal dense dans A, on peut trouver une telle suite dans I. On fixe donc un tel idéal I. On travaille dans l'unitarisation $\tilde{A}$ de A dont on note 1 l'unité.

2. Montrer que I reste un idéal de $\tilde{A}$.
3. Montrer que l'ensemble $(I_+)_1$ des éléments positifs de I qui sont de norme < 1 est filtrant. On pourra utiliser la fonction $x \mapsto x(1 + x)^{-1}$.
4. Montrer que si $x \in I_+$ et $0 \leqslant e \leqslant 1$, alors
$$\|x - xe\|^2 \leqslant \|x(1 - e)x\| .$$
5. Montrer que la suite généralisée $(e_n)_{n \in (I_+)_1}$ définie par $e_n = n$ satisfait que pour tout $x \in I_+$, $\lim_n \|x(1 - e_n)x\| = 0$.
6. Conclure.
7. Montrer que quand A est séparable, on peut en fait trouver une unité approchée dans I indexée par $\mathbb{N}$.

Exercice 4. Idéaux et quotients.
Soit A une C^*-algèbre.

1. Montrer que tout idéal bilatère fermé de A est stable par $*$.
2. Montrer que si I est un idéal bilatère fermé de A, alors A/I est une C^*-algèbre pour la norme quotient. On pourra d'abord montrer que pour tout $x \in A$,
$$\|x\|_{A/I} = \inf_{e \in (I_+)_1} \|x - xe\|$$

Exercice 5. Algèbre des multiplicateurs.
Soit $A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une C^*-algèbre non dégénérée (il n'y a pas de vecteur ξ non nul tel que $A\xi = \{0\}$).

1. Montrer que si (e_n) est une suite d'unités approchées pour A, alors (e_n) converge fortement vers l'identité. On pourra commencer par montrer qu'elle converge faiblement vers une projection.
2. Montrer que si $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfait $xa = 0$ pour tout $a \in A$ alors $x = 0$.

L'algèbre des multiplicateurs de A est l'ensemble des $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $xA \subseteq A$ et $Ax \subseteq A$. On le note $\mathcal{M}(A)$.

3. Montrer que $\mathcal{M}(A)$ est une C^*-algèbre unitale qui contient A et qui est contenue dans A'', et que A en est un idéal essentiel : il intersecte non trivialement tout autre idéal non nul.

Un double centralisateur pour A est une paire (L, R) de fonctions $L, R : A \to A$ telles que

$$R(x)y = xL(y)$$

pour tous $x, y \in A$. On note $\mathcal{DC}(A)$ l'ensemble des doubles centralisateurs.

4. Montrer que si $x \in A$, on peut naturellement associer à x un double centralisateur.
5. Montrer que si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$, alors pour tous $x, y \in A$ on a $L(xy) = L(x)y$ et $R(xy) = xR(y)$. On pourra utiliser une suite d'unités approchée pour A.
6. Montrer que si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$, alors L et R sont linéaires bornées de même norme.
7. Pour $T : A \to A$, on note $T^* : x \mapsto (T(x^*))^*$. Montrer que $(L, R) \mapsto (R^*, L^*)$ définit une involution de $\mathcal{DC}(A)$
8. Montrer que l'application $x \mapsto (L_x, R_x)$ de $\mathcal{M}(A)$ dans $\mathcal{DC}(A)$ est un $*$-isomorphisme isométrique.