TD 2 – Le cas commutatif

Exercice 1. Théorème de Serre-Swan.
Soit X un espace topologique, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un $\mathbb{K}$-**fibré vectoriel** sur X est un espace topologique $\mathcal{E}$ muni d'une application $p : \mathcal{E} \to X$ et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur chaque fibre de p telle que pour tout $x \in X$, on a un voisinage U de x et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et un homémorphisme $h : p^{-1}(U) \to E \times U$ tel que pour tout $x \in p^{-1}(U)$,

$$\pi_U(h(x)) = p(x)$$

et h induit un isomorphisme d'espace vectoriel $p^{-1}(x) \to \pi_V^{-1}(h(x))$. On fixe un tel fibré vectoriel $p : \mathcal{E} \to X$. Une **section** du fibré est une application continue $\xi : X \to \mathcal{E}$ telle que pour tout $x \in X$, $p(\xi(x)) = x$.

1. Montrer que l'espace des sections de $\mathcal{E}$ a une structure naturelle de $\mathcal{C}(X)$-module. On le note $\Gamma(\mathcal{E})$.

Étant donnés deux fibrés vectoriels $p : \mathcal{E} \to X$ et $q : \mathcal{F} \to X$, une surjection de p sur q est une application $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $q(\pi(v)) = p(v)$ pour tout $v \in \mathcal{E}$, et π induit une surjection linéaire $p^{-1}x \to q^{-1}x$ pour tout $x \in X$.

2. Montrer que pour tout fibré vectoriel $p : \mathcal{E} \to X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une surjection du fibré trivial de dimension n $\pi_X : \mathbb{K}^n \times X \to X$ sur p.
3. En déduire que l'espace des sections de p est un module projectif de type fini. On pourra s'inspirer de la question suivante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $P : X \to M_n(\mathbb{K})$ continue qui à $x \in X$ associe un projecteur orthogonal. Montrer que P définit un sous-fibré du fibré trivial donné par $\{(v, x) \in K^n \times X : P(x)v = v\}$. En déduire que tout fibré vectoriel se réalise comme sous-fibré du fibré du fibré trivial, où il admet un fibré supplémentaire (version géométrique du théorème de Serre-Swan).

Solution de l'exercice 1.

1.
2.
3.
4.

Exercice 2. Réaliser les modules projectifs de type fini comme sections.
Soit M un module projectif de type fini sur $\mathcal{C}(X)$, où X est compact, i.e.

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{K}^n) = \mathcal{C}(X)^n = M \oplus N$$

où N est un $\mathcal{C}(X)$-module. Soit e la projection sur M parallèlement à N.

1. Expliquer pourquoi e s'identifie naturellement à une application continue $e : X \to M_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $x \in X$, $e(x)$ soit une projection.

Soit $\Xi(e)$ l'ensemble des couples (v, x) tels que $e(x)v = v$.

2. Montrer que $\Xi(e)$ est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{K}^n \times X$.
3. Montrer que $M = \Gamma\Xi(e)$.
4. Montrer que réciproquement, si $M = \Gamma(\mathcal{E})$, et si on applique le théorème de Serre-Swann pour écrire $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} = \mathbb{K}^n \times X$, et on note e la projection sur $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{E} = \Xi(M)$.
5. En déduire une description alternative de $K^0(\mathcal{C}(X))$.

Exercice 3. Quelques exemples.

1. Montrer que le fibré tangent de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un fibré trivial.

2. Construire un fibré vectoriel sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui ne soit pas trivial.
3. Montrer que le fibré tangent de la sphère de Riemann n'est pas trivial.