TD 3

Exercice 1. Inversion de morphismes.
On fixe une C^*-algèbre A unitale, soient E et F deux A-modules hilbertiens. Dans cet exercice, on cherche à montrer que si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ est inversible, alors $T^{-1} \in \mathrm{Mor}(F, E)$.

1. Soit E un A-module hilbertien.
   a) Montrer que si on a deux applications linéaires $S, T : E \to E$ telles que pour tout $x \in E$, $\langle x, Tx\rangle = \langle x, Sx\rangle^*$, alors T est un morphisme et $S = T^*$.
   b) Montrer que si $T \in \mathrm{End}(E)_+$, alors $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ pour tout $x \in E$, et $\|T\| = \sup_{x\in(E)_1} \|\langle x, Tx\rangle\|$
   c) Montrer que si $T : E \to E$ est linéaire et $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ pour tout $x \in E$ alors $T \in \mathrm{End}(E)_+$.
   d) Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x, x\rangle \leqslant \langle y, y\rangle$ ssi $\|xa\| \leqslant \|ya\|$ pour tout $a \in A$.
   e) Soient F et G deux autres A-modules hilbertiens. Montrer que si $S \in \mathrm{Mor}(E, F)$ et $T \in \mathrm{Mor}(F, G)$, alors $SS^* \leqslant TT^*$ ssi $\|S^*z\| \leqslant \|T^*z\|$ pour tout $z \in G$.
2. a) Montrer que si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ est surjective alors TT^* est inversible dans $\mathrm{End}(F)$.
   b) Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'alors $E = \mathrm{Ker}\, T \oplus \mathrm{Im}\, T^*$. On pourra considérer $p = T^*(TT^*)^{-1}T$.
   c) Montrer que si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ est bijective alors $T^* \in \mathrm{Mor}(F, E)$ est bijective.
3. Conclure.