TD 2 – Spectre et C^*-algèbres

Exercice 1. Opérateurs normaux et spectre.
Soit x un opérateur d'un espace hilbertien H.

1. Démontrer que le noyau de x^* est l'orthogonal de l'image de x.
2. Démontrer que si x est normal et surjectif, il est bijectif.

Pour les questions qui suivent, on suppose que x est normal.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\lambda \in \operatorname{Sp} x$ si et seulement $\inf\{\|x\xi - \lambda\xi\|/\|\xi\|,\ \xi \neq 0\} = 0$.
4. Démontrer que $\|x\| = \sup\{|\langle \xi, x\xi \rangle|, \xi \in B\}$, où B est la boule unité de H.
5. Supposons que l'application $\xi \mapsto |\langle \xi, x\xi \rangle|$ atteint son maximum en un point $\xi \in B$. Démontrer que ξ est un vecteur propre de x.

Exercice 2. Continuité du calcul fonctionnel continu.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$, soit A une C^*-algèbre et

$$A_K = \{x \in A \colon x \text{ est normal et } \operatorname{Sp}(x) \subseteq K\}.$$

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, l'application $a \in A_K \mapsto f(a) \in A$ est continue pour la norme.

Exercice 3. C^*-algèbres abéliennes et flot universel.
Soit Γ un groupe discret.

1. Montrer que Γ agit par automorphisme sur $\ell^\infty(\Gamma)$ par $\gamma \cdot f(g) = f(\gamma^{-1}g)$.
2. En déduire que Γ agit par homéomorphisme sur le spectre de $\ell^\infty(\Gamma)$, que l'on note $\beta\Gamma$.
3. Montrer que l'application $\iota : \Gamma \to \beta\Gamma$ qui à $\gamma \in \Gamma$ associe $\iota(\gamma) : f \mapsto f(\gamma)$ est injective et d'image dense.
4. En déduire que $\Gamma \curvearrowright \beta\Gamma$ admet une orbite dense.
5. Montrer que $\Gamma \curvearrowright \beta\Gamma$ satisfait la propriété universelle suivante : pour toute action continue $\Gamma \curvearrowright X$ sur un espace compact avec un point $x_0 \in X$ d'orbite dense, il existe une unique application continue $\beta\Gamma \to X$ qui est Γ-équivariante et envoie $\iota(e)$ sur x_0.
6. Montrer que $\Gamma \curvearrowright \beta\Gamma$ est libre. On pourra commencer par le cas $\Gamma = \mathbb{Z}$.
7. En déduire que si Γ est dénombrable, alors Γ admet une action libre sur un compact métrisable.

Les questions 1 à 5 sont valables plus généralement pour les groupes topologiques agissant continûment sur des espaces compacts. La bonne C^*-algèbre à considérer pour remplacer $\ell^\infty(\Gamma)$ est celle des fonctions bornées uniformément continues à droite, notée $RUCB(G)$ en anglais. La question 6 se généralise alors aux groupes localement compacts. Il existe cependant des groupes topologiques (comme $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ muni de la topologie forte) satisfaisant une propriété opposée : toutes leurs actions continues sur des compacts admettent un point fixe ! On pourra consulter [Pes06] *pour plus d'informations.*

Références

[Pes06] Vladimir Pestov. *Dynamics of Infinite-Dimensional Groups*, volume 40 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.