TD 2 - C^*-algèbres de dimension finie

Le but de ce TD est principalement de classifier les C^*-algèbres de dimension finie (ce sont des sommes directes de $M_n(\mathbb{C})$), et les morphismes entre elles (qui seront déterminés à conjugaison unitaire près par une matrice à coefficients entiers). On s'en servira dans le TD suivant pour calculer la K-théorie des algèbres approximativement finies. Il se trouve que le bon cadre pour la plupart des résultats est celui des sous-algèbres de la C^*-algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts. Les exercices ne sont pas indépendants. Le résultat principal est donné dans l'exercice 3.

Exercice 1. Projections minimales et irréducibilité.
Soit A une sous C^*-algèbre de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ non triviale.

1. Montrer que A contient une projection minimale.
2. Montrer que pour tout $x \in A$, $pxp \in \mathbb{C}p$.
3. Montrer que si $\xi \in p\mathcal{H}$ est non nul, alors la restriction de A à $\overline{A\xi}$ est irréductible.
4. Montrer que tout $A \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ irréductible est égal à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Exercice 2. Idéaux et irréducibilité.
Soit A une C^*-algèbre, soit I un idéal bilatère fermé de A.

1. Montrer que toute représentation $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ telle que $\pi(I) \neq \{0\}$ est irréductible ssi sa restriction à I est irréductible.
2. Montrer que toute représentation $\pi : I \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ non dégénérée s'étend de manière unique en une représentation $\tilde{\pi} : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
3. En déduire que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est simple (il n'a pas d'idéal bilatère fermé non trivial).

Exercice 3. Représentations des sous-algèbres de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
Soit A une sous C^*-algèbre de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, soit $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation. Soit $p \in A$ une projection minimale telle que $\pi(p) \neq 0$, $\xi \in p\mathcal{H}$, $\eta \in \pi(p)\mathcal{H}_\pi$ avec $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$.

1. Montrer que les états associés à ξ et η sont égaux.
2. En déduire que si $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une représentation non dégénérée, alors c'est une somme directe d'irréductibles qui sont des sous-représentations de $\mathrm{id}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
3. En déduire que toute C^*-algèbre de dimension finie est une somme directe finie de $M_{n_k}(\mathbb{C})$.
4. Classifier les morphismes entre C^*-algèbres de dimension finie à conjugaison par un unitaire près.