I Introduction

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace de probabilité.

$$\mathrm{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to X \text{ bijection bimesurable qui préserve la mesure } f_*\mu = \mu \} /_{\underset{\mu\text{ p.p.}}{=}}$$

On supposera toujours que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est standard, c'est-à-dire que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est isomorphe à $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ avec Y espace métrique compact, $\mathcal{B}_0$ la tribu borélienne, ν proba sur $(Y, \mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{B}$ le complété de $\mathcal{B}_0$ par rapport à ν.

Remarque : on veut éviter les espaces trop gros, au sens où si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est standard, alors $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable (idem pour $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $\mathrm{MAlg}(X, \mathcal{A}, \mu)$)

Thèmes de ce groupe de travail :

- équivalence orbitale (quantitative / restreinte)

Définition : $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont orbitalement équivalent s'il existe $\Phi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tel que pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\Phi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Phi(x))$$

où $\mathrm{Orb}_T(x) = \{ T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

- entropie : invariant numérique associé à $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$.

Fil directeur : comprendre quand est-ce que l'entropie est un invariant d'équivalence orbitale.

II Définition de l'entropie

entropie, entropie métrique, entropie mesurée, entropie de Kolmogorov-Sinaï, entropie dynamiq.

II. 1) Partitions et entropie de Shannon.

Définition : Une partition de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est $\mathcal{P} = (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^I$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ A_k \cap A_\ell = \emptyset \quad \forall k \neq \ell \\ \bullet\ \bigcup_{k \in I} A_k = X \end{array}\right\} \text{ à mesure nulle près.}$$

Définition : L'entropie de Shannon d'une partition $\mathcal{P}$ de (X, μ) est

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{A \in \mathcal{P}} \mu(A) \log \mu(A).$$

Entropie conditionnelle : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux partitions,

$$H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{Q} \\ \mu(B) > 0}} \mu(B) H_{\mu_B}(\mathcal{P})$$

où $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$.

Quelques propriétés :

(i) On a $H(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) = -\sum_{\substack{B \in \mathcal{Q} \\ A \in \mathcal{P}}} \mu(A \cap B)\left[\log \mu(A \cap B) - \log \mu(B)\right]$

donc $H(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) = H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H(\mathcal{Q})$

(ii) $H(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) = 0 \implies \mathcal{Q}$ raffine $\mathcal{P}$, ie $\forall B \in \mathcal{Q}, \exists A \in \mathcal{P}$ tq $B \subseteq A$

$\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$

(iv) Si $\mathcal{Q}_1 \leq \mathcal{Q}_2$ ie $\mathcal{Q}_2$ raffine $\mathcal{Q}_1$, alors $H(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}_2) \leq H(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}_1)$.

(iii) $H(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{P})$ et donc $H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{P}) + H(\mathcal{Q})$

Preuve : (iii) si $A \in \mathcal{P}$, $\sum_{B \in \mathcal{Q}} -\mu(B)\mu_B(A \cap B) \log \mu_B(A \cap B) \underset{\text{convexité}}{\leq} \phi\left(\sum_{B \in \mathcal{Q}} \mu(B) \mu_B(A \cap B)\right)$

Si $T \in Aut(X,\mu)$ et $\mathcal{P}$ est une partition, $T^{-n}\mathcal{P} = (T^{-n}(A_k))_{k\in \mathbb{N}}$ est aussi une partition.

On définit $\mathcal{P}^n = \bigvee_{m=0}^{n-1} T^{-m}\mathcal{P}$.

Définition $\mathcal{P}$ est <u>génératrice</u> pour T si $\overline{\sigma(\mathcal{P}^n, n\in\mathbb{Z})}$ est égale à $\mathcal{A}$.

La plus petite tribu complète T-invariante qui contient $\mathcal{P}$ est égale à $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{P}$ est une partition, on a un codage

$$q : X \to \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$$
$$x \mapsto (\text{l'unique } A\in\mathcal{P} \text{ tq } T^{-n}(x)\in A)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Si $S : \mathcal{P}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$, $S((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'application de décalage, alors on a $q\circ T = S\circ q$. On dit que q est équivariante.

Soit $\nu = q_*\mu \in Prob(\mathcal{P}^{\mathbb{Z}})$. Alors $q : (X,\mu) \to (\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}, \nu)$ est un isomorphisme mesuré ssi $\mathcal{P}$ est génératrice.

<u>II.2) Entropie d'une transformation.</u>

Soit $T\in Aut(X,\mu)$ et $\mathcal{P}$ une partition telle que $H(\mathcal{P}) < +\infty$.

La suite $H(\mathcal{P}^n)$ est sous additive

$$H(\mathcal{P}^{n+m}) = H(\mathcal{P}^n \vee T^{-n}(\mathcal{P}^m))$$
$$\leq H(\mathcal{P}^n) + H(\mathcal{P}^m)$$

Définition : $h_\mu(T,\mathcal{P}) = \lim \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$ (Fekete).

$h_\mu(T) = \sup\{ h_\mu(T,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}$ partition tq $H(\mathcal{P}) < +\infty\} \in [0,+\infty]$

<u>Théorème</u> (KOLMOGOROV-SINAI) : Soit $T \in Aut(X,\mu)$, et $\mathcal{P}$ partition tq $H(\mathcal{P}) < +\infty$.
Si $\mathcal{P}$ est génératrice pour T, alors $h_\mu(T) = h_\mu(T,\mathcal{P})$.

<u>Conséquences :</u> Soit A ens. fini, $X = A^{\mathbb{Z}}$ et S le décalage sur $A^{\mathbb{Z}}$.
Si $\nu \in Prob(A)$, alors $h_{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}}(S) = H_\nu(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P} = (P_a)_{a\in A}$ avec
$P_a = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_0 = a\}$. En effet, $\mathcal{P}$ est génératrice pour S, et

$$H(\mathcal{P}^n) = \sum_{a_0,\dots,a_{n-1}\in A} -\nu(a_0)\nu(a_1)\dots\nu(a_{n-1}) \log \nu(a_0)\dots\nu(a_{n-1})$$

$$= n - \sum_{a\in A} \nu(a)\log(\nu(a))$$

Donc $h_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}}(S) = -\sum_{a\in A}\nu(a)\log\nu(a) = H_\nu(\mathcal{P})$.

<u>Définition</u> : $T, T' \in Aut(X,\mu)$ sont mesurablement isomorphes s'il existe
$\phi \in Aut(X,\mu)$ tq pour μ-presque tout $x\in X$, $\phi\circ T(x) = T'\circ\phi(x)$.

<u>Proposition</u> (immédiat) : Si T et T' sont mesurablement isomorphes, alors $h(T) = h(T')$.

Donc si deux décalages de Bernoulli sont isomorphes, ils ont la même entropie (réciproque vraie, ORNSTEIN).

Démonstration du théorème de Kolmogorov-Sinaï :

Il s'agit de mq $\forall \mathcal{Q}$ partition d'entropie finie, $h(T,\mathcal{Q}) \leq h(T,\mathcal{P})$.

<u>Cas n°1 :</u> $\exists N$ tq $\mathcal{Q} < \bigvee_{i=-N}^{N} T^{-i}\mathcal{P}$.

Par monotonie, $h(T,\mathcal{Q}) \leq h\left(T, \bigvee_{i=-N}^{N} T^{-i}\mathcal{P}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=-N}^{N+n-1} T^{-i}\mathcal{P}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2N}{n} \frac{1}{n+2N} H\left(T^{N}\mathcal{P}^{2N+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2N} H\left(\mathcal{P}^{2N+n}\right)$$

$$= h(T,\mathcal{P}).$$

<u>Cas général :</u>

<u>Lemme 1 :</u> $\forall \varepsilon>0$, $\exists \mathcal{Q}_\varepsilon$ tq $\mathcal{Q}_\varepsilon < \bigvee_{i=-N}^{N} T^{-i}\mathcal{P}$ et $|H(\mathcal{Q}|\mathcal{Q}') + H(\mathcal{Q}'|\mathcal{Q})| < \varepsilon$.

Utilise le fait que $\mathcal{P}$ est générateur et que $H(\mathcal{Q}) < +\infty$.

<u>Lemme 2 :</u> $H(\mathcal{Q}^n|\mathcal{Q}'^n) \leq n H(\mathcal{Q}|\mathcal{Q}')$

Preuve : $H(\mathcal{Q}^n|\mathcal{Q}'^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-i}\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'^n)$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-i}\mathcal{Q}|T^{-i}\mathcal{Q}') \quad \text{car } T^{-i}\mathcal{Q}' \leq \mathcal{Q}'^n$$

$$= n H(\mathcal{Q}|\mathcal{Q}').$$

<u>Conclusion :</u> $|H(\mathcal{Q}^n) - H(\mathcal{Q}_\varepsilon^n)| = |H(\mathcal{Q}^n|\mathcal{Q}_\varepsilon^n) - H(\mathcal{Q}_\varepsilon^n|\mathcal{Q}^n)|$

$$\leq n\varepsilon$$

et donc $|h(T,\mathcal{Q}) - \underbrace{h(T,\mathcal{Q}_\varepsilon)}_{\leq h(T,\mathcal{P}) \text{ par le cas n°1.}}| \leq \varepsilon$

Donc $h(T,\mathcal{Q}) \leq \varepsilon + h(T,\mathcal{P})$

III Groupes moyennables

Pour définir l'entropie, et démontrer le thm de KOLMOGOROV-SINAI, on a utilisé le fait que $\frac{n+2N}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Définition : Un groupe dénombrable Γ est moyennable si $\exists (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties finies de Γ tq $\forall \gamma\in\Gamma$,

$$\frac{|\gamma F_n \cap F_n|}{|F_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Lemme : Soit G moyennable. Soit $\varphi : \mathcal{P}_f(\Gamma) \to [0,+\infty[$ telle que

(i) $\forall F\in\mathcal{P}_f(\Gamma)$ et $\forall\gamma\in\Gamma$, $\varphi(\gamma F) = \varphi(F)$

(ii) $\forall E\subseteq F$ parties finies, $\varphi(E)\leq\varphi(F)$

(iii) $\forall E,F\in\mathcal{P}_f(\Gamma)$, $\varphi(E\cup F) \leq \varphi(E)+\varphi(F)-\varphi(E\cap F)$

Alors pour toute suite de Følner $(F_n)_{n\geq 1}$, $\frac{\varphi(F_n)}{|F_n|}$ converge vers $\inf \frac{\varphi(F_n)}{|F_n|}$ et est indépendant du choix de la suite de Følner.

Si $\mathcal{P}$ est une partition, on note $\mathcal{P}^F = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} \gamma F$. Alors $F \to H(\mathcal{P}^F)$ vérifie les hyp.

(i) ok, (ii) ok.

(iii) $H(\mathcal{P}^{E\cup F}) - H(\mathcal{P}^E) = H(\mathcal{P}^{F\setminus E} \vee \mathcal{P}^E) - H(\mathcal{P}^E)$

$= H(\mathcal{P}^{F\setminus E} \mid \mathcal{P}^E)$

$\leq H(\mathcal{P}^{F\setminus E} \mid \mathcal{P}^{E\cap F})$ car $\mathcal{P}^E$ raffine $\mathcal{P}^{E\cap F}$, $\mathcal{P}^{E\cap F} \leq \mathcal{P}^E$

$= H(\mathcal{P}^F) - H(\mathcal{P}^{E\cap F})$

Def : $h(G \curvearrowright (X,\mu), \mathcal{P}) = \lim \frac{H(\mathcal{P}^{F_n})}{|F_n|}$ pour n'importe quelle suite de Følner (F_n).