UPMC - Cours de M2 Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux

Examen du 16 décembre 2015

3 heures. Les téléphones, les calculatrices et tous les documents sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Exercice 1

Soit G un groupe. Un G-ensemble consiste en la donnée d'un ensemble X muni d'une action à gauche de G, c'est à dire d'une application $G \times X \to X$ notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que, pour $g, g' \in G$, $x \in X$, on a $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ et $e \cdot x = x$, avec e l'élément neutre de G. Un morphisme de G-ensembles est une application $f : X \to X'$ entre G-ensembles telle que pour tout $g \in G$, $x \in X$, $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des (petits) ensembles, $G - \mathcal{E}ns$ celle des (petits) G-ensembles et $o : G - \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}ns$ le foncteur d'oubli de l'action de G.

1. Montrer que o admet un adjoint à droite σ. On pourra commencer par calculer $\sigma(\{\text{pt}\})$.
2. Montrer que o admet un adjoint à gauche τ. On pourra commencer par calculer $\tau(\{\text{pt}\})$.

Exercice 2

On dit qu'une catégorie C est *cocomplète* si toutes les colimites indexées par des petites catégories existent dans C. Un foncteur $F : C \to D$ entre catégories cocomplètes est dit *cocontinu* s'il commute aux colimites. Si C est une catégorie, on note $\widehat{C}$ la catégorie des préfaisceaux sur C, autrement dit la catégorie des foncteurs $C^{\text{op}} \to \mathcal{E}ns$. On fixe une **petite** catégorie C.

1. Rappeler la définition du foncteur de Yoneda $h : C \to \widehat{C}$ et l'énoncé du lemme de Yoneda. (On utilisera la notation h_X pour $h(X)$.)
2. Montrer que $\widehat{C}$ est cocomplète.
3. Soit F un objet de $\widehat{C}$. On considère la petite catégorie C_F dont les objets sont les paires (X, x) avec X un objet de C et x un élément de $F(X)$. Un morphisme $(X, x) \to (X', x')$ est un morphisme $g : X \to X'$ tel que

$F(g)(x') = x$. On note $o : C_F \to C$ le foncteur d'oubli de x. Montrer que F est isomorphe à la colimite $\varinjlim_{C_F} h_{o((X,x))}$.

4. Soit D une catégorie cocomplète. On note $\mathrm{Fonc}(C, D)$ la catégorie des foncteurs $C \to D$ et $\mathrm{CocFonc}(\widehat{C}, D)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonc}(\widehat{C}, D)$ formée des foncteurs cocontinus. On veut montrer que le foncteur
$$H : \mathrm{CocFonc}(\widehat{C}, D) \longrightarrow \mathrm{Fonc}(C, D)$$
donné par composition avec h est une équivalence de catégories. Montrer que H est pleinement fidèle.
5. Soit $G : C \to D$ un foncteur. On considère le foncteur $G_! : \widehat{C} \to D$ qui envoie un objet F sur $\varinjlim_{C_F} G(o((X, x)))$. Montrer que $G_!$ est adjoint à gauche du foncteur $G^* : D \to \widehat{C}$ qui à un objet d associe le foncteur $c \mapsto \mathrm{Hom}_D(G(c), d)$.
6. Montrer que $G_!$ est cocontinu et que G est isomorphe à $G_! \circ h$.
7. Conclure.

Exercice 3

On note X l'ensemble des entiers positifs muni de la topologie discrète et Y un singleton vu comme espace topologique. Il existe une unique application (continue) $f : X \to Y$. Soit E un ensemble, pour tout espace topologique Z on note E_Z le faisceau d'ensembles associé au préfaisceau constant de valeur Z sur X.

1. Décrire $f^{-1}(E_Y)$ et $f_*(E_X)$.
2. Soit $F : C \to D$ l'adjoint à gauche d'un foncteur $G : D \to C$. Rappeler la construction des morphismes de foncteurs $FG \to \mathrm{Id}_D$ et $\mathrm{Id}_C \to GF$ associés.
3. Décrire les morphismes $f^{-1}f_*(E_X) \to E_X$ et $E_Y \to f_*f^{-1}(E_Y)$.

Exercice 4

Soit X un espace topologique. Soit P un préfaisceau d'ensembles sur X. Pour U un ouvert et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U on note $P(\mathcal{U})$ l'ensemble des familles $(s_i)_{i\in I}$ avec $s_i \in P(U_i)$ et $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$ pour tout i, j.

1. On munit l'ensemble des recouvrements ouverts de U d'une structure d'ensemble partiellement ordonné (et donc d'une structure de catégorie) par $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I} \leq \mathcal{U}' = (U'_j)_{j\in I'}$ si pour tout j il existe $i(j)$ tel que $U'_j \subset U_{i(j)}$. On définit un morphisme $P(\mathcal{U}) \to P(\mathcal{U}')$ en envoyant $(s_i)_{i\in I}$ sur $(s_{i(j)}|U'_j)_{j\in I'}$. Vérifier qu'il est indépendant des choix.
2. On note $L(P)$ le préfaisceau $U \mapsto \varinjlim P(\mathcal{U})$, la colimite étant prise sur l'ensemble des recouvrements ouverts de U. Calculer $L(P)$ et $LL(P)$ lorsque P est un préfaisceau constant.

3. Soit P un préfaisceau d'ensembles sur X. Montrer que $L(P)$ est séparé.
4. On suppose que P est séparé. Montrer que $L(P)$ est un faisceau.
5. On suppose que P est un faisceau. Montrer que le morphisme canonique $P \to LL(P)$ est un isomorphisme.
6. Soit P un préfaisceau d'ensembles sur X. Montrer que $LL(P)$ est isomorphe au faisceau associé à P.