

Théorie des modèles 1

Françoise Point

27 mai 2015

Table des matières

1	Préliminaires.	0
2	Corps algébriquement clos.	2
2.1	Clôture algébrique	2
2.2	Applications polynomiales et un théorème de J. Ax.	5
3	Corps réels-clos	7
3.1	Structures ordonnées-groupes et corps.	7
3.2	Clôture réelle et axiomatisation.	11
4	Élimination des quantificateurs	15
4.1	Ensembles définissables.	15
4.2	Critères d'élimination des quantificateurs.	17
4.3	Théories o-minimales	22
5	Théorèmes de Lowenheim-Skolem.	25
5.1	Fonctions de Skolem.	25
5.2	Exercices.	27
5.3	Sous-structures élémentaires et test de Tarski-Vaught.	28
5.4	Chaînes de \mathcal{L} -structures.	29
5.5	Construction de sous-structures et extensions élémentaires	29
5.6	Exercices.	32
6	Dualité de Stone.	33
6.1	Classes élémentaires.	33
6.2	Espaces de Stone.	36
6.3	Espaces de types et saturation.	38
6.4	Exercices.	39
7	Théories \aleph_0-catégoriques	41
7.1	Théorème d'omission des types	41
7.2	Modèles atomiques et va-et-vient	43
7.3	Théorème de Ryll-Nardzewski	44

8	Théorèmes de préservation.	46
8.1	Théories modèles-complètes	46
8.2	Amalgamation	48
8.3	Exercices.	50
A	Rappels sur les algèbres de Boole.	51
B	Rappels très brefs sur les ordinaux et les cardinaux.	52
C	Exercices résolus.	54
C.1	Section 5.2.	54
C.2	Section 5.6.	56
C.3	Section 6.4.	57
C.4	Section 8.3.	65
	Bibliographie	69

Remerciements :

Je remercie Nathalie Regnault, qui a participé à une première rédaction de ces notes (et notamment à la rédaction des solutions d'exercices) durant l'année 2010-2011, ainsi que

Quentin Brouette pour ses remarques judicieuses.

J'ai le plaisir d'associer à ces remerciements tous les étudiants de Bac 3.

Chapitre 1

Préliminaires.

On notera \mathcal{L} un langage du premier ordre (*premier ordre* signifie qu'on ne quantifiera que sur les éléments de la \mathcal{L} -structure). On emploiera éventuellement comme symboles logiques : $\&$ (au lieu de \wedge), ou (au lieu de \vee), \neg , \rightarrow , $(,)$, \forall , \exists .

Rappelons quelques résultats et conventions du premier cours de Logique :

- Toute \mathcal{L} -formule $\phi(\bar{y})$ peut être mise sous forme préfixe c.a.d. sous la forme

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \theta(x_1, \cdots, x_n, \bar{y}),$$

où $\theta(x_1, \cdots, x_n, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs et Q_i est soit le quantificateur \forall , soit le quantificateur \exists . On dira que la formule est existentielle (respectivement universelle) si tous les quantificateurs Q_i sont existentiels (respectivement universels), que la formule est $\forall\exists$ (respectivement $\exists\forall$) s'il existe $0 \leq m \leq n$ tel que Q_1, \cdots, Q_m est égal à \forall et Q_{m+1}, \cdots, Q_n à \exists avec la convention que si $m = 0$, il n'y a aucun quantificateur universel et que si $m = n$ il n'a aucun quantificateur existentiel (respectivement s'il existe $0 \leq m \leq n$ tel que Q_1, \cdots, Q_m est égal à \exists et Q_{m+1}, \cdots, Q_n à \forall avec la convention que si $m = 0$, il n'y a aucun quantificateur existentiel et que si $m = n$ il n'a aucun quantificateur universel). On dit que Q_1, \cdots, Q_m est un *bloc* de quantificateurs \exists et que Q_{m+1}, \cdots, Q_n est un *bloc* de quantificateurs \forall .

Il y a plusieurs façons de définir la complexité d'une formule. Un des choix est de définir la *complexité* de la formule définie plus haut : $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \theta(x_1, \cdots, x_n, \bar{y})$ comme étant égale à n . Un autre choix serait de compter l'alternance des blocs différents de quantificateurs.

• Par \mathcal{L} -théorie, on entend un ensemble de \mathcal{L} -énoncés. Un ensemble Σ de \mathcal{L} -énoncés est consistant s'il a un modèle. Rappelons que par le *théorème de compacité*, il suffit que toute partie finie de Σ ait un modèle pour que Σ ait un modèle.

Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure. La notation $\mathcal{A} \models \Sigma$, où Σ est une \mathcal{L} -théorie, signifie que pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{A} \models \sigma$ (ou encore σ est vrai dans \mathcal{A}) ; on dit que \mathcal{A} est un modèle de Σ .

• Un \mathcal{L} -énoncé σ est une conséquence de T ou encore $T \models \sigma$ si tout modèle de T satisfait σ . Par le *théorème de complétude*, c'est équivalent à ce qu'il existe une démonstration de σ à partir de T (et des axiomes logiques), ce que l'on note par $T \vdash \sigma$.

- Une \mathcal{L} -théorie consistante est complète si pour tout énoncé σ , soit $T \vdash \sigma$, soit $T \vdash \neg\sigma$.
- Notion de \mathcal{L} -structures élémentairement équivalentes et sous-structures élémentaires.
- On note $\prod_I \mathcal{A}_i / \mathcal{U}$: l'ultraproduit des \mathcal{L} -structures \mathcal{A}_i , $i \in I$, par rapport à l'ultrafiltre \mathcal{U} sur I . (On utilisera aussi la notation $\prod_I^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$.) Une conséquence du théorème de Łos sur

les ultraproducts est que pour tout énoncé σ , on a l'équivalence suivante :

$$\prod_I^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \sigma \leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}.$$

Chapitre 2

Corps algébriquement clos.

2.1 Clôture algébrique

Soit $\mathcal{K} := (K, +, -, \cdot, 0, 1)$ un corps commutatif. Soit $K[X]$ l'anneau des polynômes à une variable sur K . C'est un anneau Euclidien i.e. il a la propriété suivante de division Euclidienne. Pour tout $p_1(X), p_2(X) \in K[X]$ avec $\deg(p_1(X)) \geq \deg(p_2(X))$, il existe $q(X)$ et $r(X)$ avec soit $r(X) \neq 0$ et $\deg(r(X)) < \deg(p_2(X))$, soit $r(X) = 0$, tels que

$$p_1(X) = p_2(X) \cdot q(X) + r(X).$$

Utilisant cette propriété, on montre que tout idéal $I \neq \{0\}$ de $K[X]$ est principal (i.e. engendré par un élément). En effet, on choisit dans I un élément $q(X) \neq 0$ de degré minimal et on montre que I est engendré par cet élément ($q(X)$ divise tout autre élément non nul de I). On appelle ce type d'anneau *principal*.

Définition 2.1.1 Soit \mathcal{K} un corps commutatif. Le corps K est *algébriquement clos* si tout polynôme $q(X) \in K[X]$ a un zéro dans K .

Notation 2.1.1 On notera ACF l'ensemble des \mathcal{L}_{an} -énoncés suivants :

1. les axiomes de corps commutatifs,
2. pour chaque naturel $n \in \mathbb{N}$, l'axiome

$$\forall a_0 \forall a_1 \cdots \forall a_n \exists x \sum_{i=0}^n a_i x^i + x^{n+1} = 0.$$

Soit $ACF_0 = ACF \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_p \neq 0 : p \in \mathcal{P}\}$, où \mathcal{P} est l'ensemble des nombres premiers et $ACF_p := ACF \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_p = 0\}$, $p \in \mathcal{P}$.

ACF_0 est une théorie consistente : $\mathbb{C} \models ACF_0$ (voir par exemple le cours d'analyse complexe).

On verra que ACF_p est également une théorie consistente (voir Corollaire 2.1.4).

Soit L un corps commutatif étendant K . Un élément u de L est algébrique sur K s'il existe un polynôme $p(X) \neq 0$ à coefficients dans K tel que $p(u) = 0$. On choisit un tel polynôme monique et de degré minimal. Il est alors unique pour la propriété d'annuler u et on l'appelle polynôme *minimal* de u . Si u est algébrique sur K , son polynôme minimal $p(X)$ sur K est irréductible. Soit $u \in L - K$ et soit $p(X) = \sum_{i=0}^d X^i \cdot a_i$ avec $a_d = 1$ et $a_0 \neq 0$, son polynôme minimal sur K . Alors le sous-anneau $K[u]$ de L engendré par K et u (qui est aussi le K -sous-espace vectoriel engendré par $\{u^n : n \in \omega\}$) est de dimension d (comme K espace vectoriel). Par ailleurs, u^{-1} appartient au K -espace vectoriel engendré par $1, u, \dots, u^{d-1}$. On écrit : $u \cdot (u^{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} u^i \cdot a_i) = -a_0$. Donc $u^{-1} = -a_0^{-1} \cdot (u^{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} u^i \cdot a_i)$. On montre ainsi que le sous-anneau $K[u]$ de L est égal au sous-corps $K(u)$ de L engendré par K et u .

Si la dimension de L sur K , en tant que K -espace vectoriel, est finie, disons $d \in \mathbb{N}$, alors tout élément $v \in L - \{0\}$ est algébrique sur K et le degré du polynôme minimal de v sur K est borné par la dimension de L sur K . On dira que L est une extension algébrique finie de K . (On considère l'ensemble $\{v^n : n \in \omega\}$, il engendre un sous-espace vectoriel sur K de dimension $\leq d$).

Si tout élément de $L - \{0\}$ est algébrique sur K , on dit que L est une *extension algébrique* de K .

Exercice : Soit \mathbb{F}_2 le corps à deux éléments. Soit $p(X) := X^2 + X + 1$; ce polynôme n'a pas de zéro dans \mathbb{F}_2 et est irréductible. Notons I l'idéal engendré par $p(X)$ et soit $\alpha := X + I \in \mathbb{F}_2[X]/I$. On vérifie que $\mathbb{F}_2(\alpha)$ est un corps contenant \mathbb{F}_2 et de cardinalité 4.

Soit $q(X) := X^3 + X + 1$; montrer que $q(X)$ est irréductible. Notons M l'idéal engendré par $q(X)$ et soit $\beta := X + M \in \mathbb{F}_2[X]/M$. On vérifie que $\mathbb{F}_2(\beta)$ est un corps contenant \mathbb{F}_2 et de cardinalité 8. Montrez que $\mathbb{F}_2(\alpha)$ n'est pas inclus dans $\mathbb{F}_2(\beta)$.

Définition 2.1.2 \tilde{K} est une clôture algébrique de K si \tilde{K} est une extension algébrique de K et si \tilde{K} est algébriquement clos.

Proposition 2.1.1 *Tout corps commutatif K a une clôture algébrique.*

Preuve : On applique le lemme de Zorn à l'inductif formé par l'ensemble des extensions algébriques de K avec comme ordre partiel la relation d'inclusion. L'inclusion est bien une relation d'ordre (partiel) et cet ensemble est fermé par union de chaînes. On peut donc appliquer le lemme de Zorn et donc il existe une extension algébrique maximale de K . Pour montrer que cet élément maximal \tilde{K} est un corps algébriquement clos, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.2 *Soit $K \subset L \subset F$ avec F algébrique sur L et L algébrique sur K . Alors F algébrique sur K .*

Preuve : Montrons que tout élément de $F - L$ est algébrique sur K . Soit $a \in F$ et $p(x) \in L[x]$ son polynôme minimal sur L . Soient b_1, \dots, b_n les coefficients de ce polynôme. Ils sont chacun algébriques sur K et donc $K[b_i]$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K ; b_i étant algébrique sur K , $K[b_i] = K(b_i)$ est un corps. On considère la chaîne de K -espaces vectoriels, $K \subset K[b_1] = K(b_1) \subset K[b_1][b_2] = K(b_1)(b_2) = K(b_1, b_2) \subset \dots \subset K[b_1][b_2] \dots [b_n] = K(b_1, \dots, b_n) \subset K(b_1, \dots, b_n)[a]$. Et donc le K -espace vectoriel $K[a] \subset K(b_1, \dots, b_n)[a]$ est de dimension finie sur K . Ainsi a est algébrique sur K . \square

Soit $p(X)$ un polynôme à coefficients dans \tilde{K} . Supposons qu'il soit irréductible dans \tilde{K} , sinon on considère un de ses facteurs irréductibles. On considère alors l'anneau $\tilde{K}[X]/(p(X))$, où $(p(X))$ est l'idéal engendré par $p(X)$. Soit $q(X) + (p(X)) \in \tilde{K}[X]/(p(X))$ avec $\deg(q(X)) < \deg(p(X))$. Considérons l'idéal engendré par $(q(X), p(X))$ dans $\tilde{K}[X]$. Il est engendré par disons $r(X)$ qui divise $q(X)$ et $p(X)$. Comme $p(X)$ est irréductible, $r(X)$ est inversible et donc $1 \in (q(X), p(X))$. Il existe donc $r_1(X), r_2(X) \in \tilde{K}[X]$ tels que $1 = r_1(X).q(X) + r_2(X).p(X)$ i.e. $q(X) + (p(X))$ est inversible. Et donc $\tilde{K}[X]/(p(X))$ est un corps commutatif dans lequel \tilde{K} se plonge : $a \rightarrow a + (p(X))$ et où $p(X)$ a un zéro : $X + (p(X))$. C'est une extension algébrique finie de \tilde{K} et par le Lemme, une extension algébrique de K et donc par maximalité de \tilde{K} , égale à \tilde{K} .

Cette extension \tilde{K} est donc un corps algébriquement clos et donc c'est une clôture algébrique de K . \square

Nous ne montrerons pas l'unicité à iso près de cette clôture, qui découle du théorème de Steinitz suivant (voir cours de Volkov).

Théorème 2.1.3 (Steinitz) *Soit \tilde{K} une clôture algébrique de K . Soit $K \subseteq L_0 \subseteq L$ des extensions algébriques de K . Soit σ_0 un K -iso de L_0 dans \tilde{K} . Alors il existe un K -iso σ de L dans \tilde{K} qui prolonge σ_0 . \square*

Corollaire 2.1.4 *La théorie ACF_p est consistante.*

Preuve : Soit \mathbb{F}_p le corps premier à p éléments. Notons $\tilde{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique. C'est bien un corps algébriquement clos de caractéristique p . \square

Notation 2.1.2 Soit K un corps de caractéristique p , $p \in \mathcal{P}$. L'application F qui envoie x sur x^p est appelée le *Frobenius*. On notera F^n la composée de F n fois avec elle-même et par $\text{Fix}_K(F^n)$ l'ensemble des éléments de K fixés par F^n , $n \in \mathbb{N}$. Par convention, F^0 est l'application identité.

Lemme 2.1.5 *Soit K un corps de caractéristique p . L'application Frobenius est un endomorphisme injectif de K . Pour chaque $n \in \omega$, $\text{Fix}_K(F^n)$ est un sous-corps de K et $\text{Fix}_K(F)$ est isomorphe à \mathbb{F}_p .*

Preuve : La seule vérification qui n'est pas tout-à-fait immédiate est la suivante : $(x + y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k}.y^k$ et comme p divise $\binom{p}{k}$, lorsque $1 \leq k < p$, on a que dans K , $(x + y)^p = x^p + y^p$.

Tout endomorphisme de corps est injectif et donc en particulier F . Faisons le raisonnement pour F : soit $a \neq 0$, comme a est inversible, on a que $1 = F(1) = F(a.a^{-1}) = F(a).F(a^{-1})$ et donc $F(a) \neq 0$.

On vérifie facilement que l'ensemble des éléments de K fixés par un endomorphisme est un sous-corps et la composée de deux endomorphismes est encore un endomorphisme. \square

Proposition 2.1.6 *Le corps $\tilde{\mathbb{F}}_p$ est une union de corps finis, laissés invariant par le Frobenius.*

Preuve : Par le Lemme précédent, on sait que l'application Frobenius est un endomorphisme injectif de $\tilde{\mathbb{F}}_p$.

Montrons que $\tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n \in \omega^*} \text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$.

Soit $a \in \tilde{\mathbb{F}}_p$ et considérons $\{F^n(a) : n \in \omega\}$. Par définition d'une clôture algébrique, il existe un polynôme $q(X) \in \mathbb{F}_p[X] - \{0\}$ de degré $d \geq 1$, tel $q(a) = 0$. On a que $F(q(a)) = q(F(a)) = 0$ et donc il existe $0 \leq i < j \leq d$ tel que $F^i(a) = F^j(a)$ ou encore $F^{j-i}(a) = a$ (F est injectif), ainsi $a \in \text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^{j-i})$.

Par le Lemme précédent, chaque $\text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$ est un sous-corps de $\tilde{\mathbb{F}}_p$. Chacun de ces sous-corps est fini car c'est aussi l'ensemble des éléments de $\tilde{\mathbb{F}}_p$ qui satisfont à l'équation $x^{p^n} - x = 0$ qui a au plus p^n solutions dans un corps. \square

Remarque 2.1.7 Par le théorème de Łos rappelé dans les Préliminaires, pour tout ultrafiltre \mathcal{U} non-principal sur \mathcal{P} , on a que $\prod_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbb{F}}_p / \mathcal{U}$ est un modèle de ACF_0 . Ce modèle est de même cardinalité que \mathbb{C} (voir cours de Michaux).

Nous montrerons dans le chapitre 4.2 que la théorie ACF_0 est complète (voir Théorème 4.2.3) et donc elle axiomatise la théorie du corps des complexes.

2.2 Applications polynomiales et un théorème de J. Ax.

Définition 2.2.1 Une application *polynomiale* de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n est une application qui envoie $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ vers $(f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$, où $f_i(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $1 \leq i \leq n$. On dira qu'elle est de degré $\leq d$ si pour chaque f_i , $1 \leq i \leq n$, la somme des degrés des X_j est plus petit ou égal d .

Théorème 2.2.1 *Toute application polynomiale de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n injective est surjective.*

Preuve : Les étapes principales de la preuve sont les suivantes.

1. La propriété énoncée dans le théorème pour toutes les applications polynomiales de degré $\leq d$ s'exprime dans le langage des anneaux $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ par un énoncé $\forall \exists$. Notons un tel énoncé $\chi = \forall x_1 \dots x_m \exists y_1 \dots y_k \theta(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$, où $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs.
2. Toute application d'un ensemble fini E dans lui-même qui est injective est surjective.
3. Par la Proposition 2.1.6, $\tilde{\mathbb{F}}_p$ est une union de corps finis $\text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$ qui sont laissés invariants par F , le Frobenius. (Notons que cette application F est injective et donc par le point précédent, surjective dans chacun de ces sous-corps $\text{Fix}(F^n)$, $n \in \omega$).
4. Dans chaque $\text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$, χ est vraie. Montrons que χ est vraie dans $\bigcup_{n \in \omega^*} \text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Soient $a_1, \dots, a_m \in \bigcup_{n \in \omega^*} \text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$, il existe donc n tel que $a_1, \dots, a_m \in \text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Comme χ est vraie dans $\text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$, il existe b_1, \dots, b_k tels que $\theta(\bar{a}, \bar{b})$ est vraie dans $\text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Comme θ est une formule sans quantificateurs, elle reste vraie dans $\bigcup_{n \in \omega^*} \text{Fix}_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Et donc χ est vraie dans $\tilde{\mathbb{F}}_p$.
5. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur \mathcal{P} , l'ensemble des nombres premiers. Comme chaque $\tilde{\mathbb{F}}_p \models \chi$, par le théorème de Łos, $\prod_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbb{F}}_p \models \chi$.

6. Par le Remarque 2.1.7, la \mathcal{L} -structure $\prod_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{F}}_p$ est un corps algébriquement clos, de caractéristique zéro et de cardinalité 2^{\aleph_0} . Or, il y a un seul (à isomorphisme près) corps algébriquement clos de cardinalité 2^{\aleph_0} et de caractéristique fixée. (Pour montrer cette dernière propriété, on utilise le fait que dans un tel corps les ensembles d'éléments algébriquement indépendants maximaux sont de cardinalité 2^{\aleph_0}).

Comme χ est vraie dans $\prod_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{F}}_p$, elle est vraie dans \mathbb{C} .

□

Soit $V \subset \mathbb{C}^n$ un fermé de Zariski c.a.d. un sous-ensemble de la forme

$$\{\bar{a} : \mathbb{C} \models \bigwedge_{i=1}^m p_i(\bar{a}) = 0\},$$

où $p_i[X_1, \dots, X_n] \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Corollaire 2.2.2 *Toute application polynomiale d'un fermé de Zariski V de \mathbb{C}^n dans elle-même qui est injective est surjective.*

Preuve : Exercice. □

Chapitre 3

Corps réels-clos

3.1 Structures ordonnées-groupes et corps.

Utilisant l'existence d'une clôture algébrique, nous montrerons dans ce chapitre comment axiomatiser le corps des nombres réels \mathbb{R} , c.a.d. que nous écrirons dans un certain langage \mathcal{L} dans la logique du premier ordre, une liste de propriétés vraies dans \mathbb{R} telles que si une autre \mathcal{L} -structure satisfait ces propriétés, alors elle est élémentairement équivalente à \mathbb{R} .

Citons pêle-mêle quelques propriétés de \mathbb{R} : c'est un corps commutatif totalement ordonné ; toute suite de Cauchy converge ; le théorème des valeurs intermédiaires est vrai dans \mathbb{R} ; tout sous-ensemble borné a un supremum ; \mathbb{R} est un corps archimédien ; tout nombre positif est un carré etc.

Ces propriétés s'expriment-elles dans notre formalisme ? Suffisent-elles pour caractériser \mathbb{R} à équivalence élémentaire près ? (Nous savons déjà qu'on ne peut caractériser de cette manière \mathbb{R} à isomorphisme près : par le théorème de Łos, une ultrapuissance non principale de \mathbb{R} a les mêmes propriétés que \mathbb{R} exprimable dans la logique du premier ordre).

On utilisera sur les références [3], [4]. Nous allons tout d'abord (re)voir les notions d'ordre (total), de groupes totalement ordonnés et de corps totalement ordonnés.

Soit $\mathcal{L}_< := \{<, \dots\}$ un langage du premier ordre qui contient le symbole de relation binaire $<$. C'est une relation d'ordre si elle est anti-reflexive, anti-symétrique et transitive. On notera la $\mathcal{L}_<$ -théorie $T_<$ suivante des ordres totaux :

$$\begin{aligned} & \forall x \neg(x < x), \\ & \forall x \forall y (x < y \rightarrow \neg(y < x)), \\ & \forall x \forall y \forall z ((x < y) \& (y < z)) \rightarrow (x < z). \\ & \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (x < y \text{ ou } (y < x))). \end{aligned}$$

Des exemples de modèles de $T_<$: $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{N}, <)$.

On note $T_{<,dense}$ la $\mathcal{L}_<$ -théorie des ordres totaux denses c.a.d.

$$T_< \cup \{\forall x \forall y (x < y \rightarrow (\exists z x < z < y))\}.$$

Dans nos formules, on utilisera l'abréviation $x \leq y$ pour $(x < y \text{ ou } x = y)$.

On note $T_{<,discret}$ la $\mathcal{L}_<$ -théorie des ordres totaux discrets c.a.d.

$$T_< \cup \{\forall x \forall y (x < y \rightarrow (\exists z (x < z \leq y \& (\forall u (x < u \rightarrow z \leq u))))\}.$$

Définition 3.1.1 Soient $\mathcal{A} := (A, <)$, $\mathcal{B} := (B, <)$ deux modèles de $T_{<}$.

Le produit *lexicographique* $\mathcal{A} \overrightarrow{\times} \mathcal{B}$ est la $\mathcal{L}_{<}$ -structure dont le domaine est le produit cartésien : $A \times B$ et la relation d'ordre est interprétée de la façon suivante : $(a, c) < (b, d)$ si $(a < b$ ou $(a = b$ et $c < d))$, où $a, b \in A$, $c, d \in B$.

Exercice : Montrer que $\mathcal{A} \overrightarrow{\times} \mathcal{B} \models T_{<}$. Est-ce que le produit direct de \mathcal{A} et \mathcal{B} est un modèle de $T_{<}$?

Exercice : Montrer que $(\mathbb{Q}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{N}, <)$ et que $(\mathbb{Q}, <) \overrightarrow{\times} (\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <) \overrightarrow{\times} (\mathbb{Q}, <)$.

Question : Comment axiomatiser les théories de ces structures ?

Définition 3.1.2 Soit $\mathcal{M} := \langle M, <, \dots \rangle$ un modèle de $T_{<}$. On appelle *intervalle* de M un sous-ensemble (définissable avec paramètres) de M de la forme $[ab]$ (intervalle fermé), $]ab[$ (intervalle ouvert), $[ab[,]ab]$ (semi-ouvert), où $a, b \in M \cup \{\pm\infty\}$, $a \leq b$ (en définissant $-\infty < M < +\infty$).

Soient A, B deux sous-ensembles non-vides de M , supposons $A < B$ (c.a.d. tout élément de A est plus petit que tout élément de B), qu'il n'existe pas d'élément $m \in M$ tel que $A < m < B$, mais que pour tout sous-ensemble fini $A_0 \subset A$, et $B_0 \subset B$, il existe $m_0 \in M$ tel que $A_0 < m_0 < B_0$. On appelle *coupure* $C_{A,B}$ de \mathcal{M} , l'ensemble des formules de la forme $a < x$ ou $x < b$ avec $a \in A$, $b \in B$. On dit que cette coupure est réalisée dans une extension $\mathcal{N} := (N, <)$ de \mathcal{M} s'il existe un élément c de N tel que dans \mathcal{N} , on ait $A < c < B$.

Exercice : Montrer que toute coupure de \mathcal{M} est réalisée dans une extension élémentaire de \mathcal{M} .

Exercice : Montrer que $(\mathbb{Z}, <)$ n'a pas de coupures. Donner un exemple de coupure de $(\mathbb{Q}, <)$ qui n'est pas réalisée dans $(\mathbb{R}, <)$. Est-ce que toute coupure de $(\mathbb{Q}, <)$ est réalisée dans une ultrapuissance non-principale de $(\mathbb{R}, <)$?

Soit $\mathcal{L}_g := \{., ^{-1}, 1\}$ le langage des groupes et soit T_g (respectivement $T_{g,a}$) un ensemble d'axiomes qui axiomatisent la théorie des groupes (respectivement des groupes abéliens). Soit $\mathcal{L}_{g,<} := \mathcal{L}_g \cup \{<\}$.

Définition 3.1.3 Un groupe ordonné (respectivement abélien ordonné) est une $\mathcal{L}_{g,<}$ -structure qui satisfait à $T_{<} \cup T_g$ (respectivement $T_{<} \cup T_{g,a}$) et à l'axiome suivant :

$\forall a, b, c \ (a < b \rightarrow (a.c < b.c \ \& \ c.a < c.b))$. On notera la théorie correspondante $T_{g,<}$ (respectivement $T_{g,a,<}$).

Exemples de groupe abélien ordonné : $(\mathbb{Z}, +, -, 0, <)$, $(\mathbb{Q}, +, -, 0, <)$.

Exercice : Montrer qu'un groupe abélien divisible ordonné satisfait à $T_{<,dense}$.

Proposition 3.1.1 *Tout groupe abélien sans torsion est ordonnable.*

Preuve : Supposons que l'on ait cette condition, on applique le lemme de Zorn et on obtient un ensemble P tel que G soit l'union disjointe de $P, \{1\}$ et P^{-1} .

Maintenant si on suppose G abélien et si G est sans torsion, 0 n'appartient pas au sous-semi-groupe engendré par un élément. Etant donné une partie A de G qui satisfait à cette condition (\star) , on montre que l'on peut toujours ajouter un élément. Notons $\langle A \rangle$ le semi-groupe engendré par A (dans G). Prenons $A := \{g_1, \dots, g_n\}$ et supposons que

$0 \in \langle h, A \rangle$ et $0 \in \langle -h, A \rangle$ bien que $0 \notin \langle A \rangle$. On a, pour $m, m', n_i, n'_i \geq 0$, $m, m' \neq 0$.
 $m.h + \sum_i n_i.g_i = 0 = -m'.h + \sum_i n'_i.g_i$.

D'où $m'.\sum_i n_i.g_i + m.\sum_i n'_i.g_i = 0$, une contradiction. \square

Soit $\mathcal{L}_{an} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ le langage des anneaux et soit T_f un ensemble d'axiomes qui axiomatisent la théorie des corps commutatifs. Soit $\mathcal{L}_{an, <} := \mathcal{L}_{an} \cup \{<\}$.

Définition 3.1.4 On dira qu'un corps (commutatif) est ordonné si c'est une $\mathcal{L}_{an, <}$ -structure qui satisfait à $T_f \cup T_{<}$ et aux axiomes supplémentaires suivants :

$$\forall a, b, c \quad (a < b \rightarrow a + c < b + c) \text{ et}$$

$$\forall a, b, c \quad (c > 0 \ \& \ a < b) \rightarrow (a.c < b.c).$$

Exercice : Montrer que dans un corps ordonné on a les propriétés suivantes :

1. $\forall a \quad (0 \leq a^2)$
2. $\forall a \forall b \quad (0 < a < b \rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1})$
3. $\forall a \forall b \quad (0 < a.b \leftrightarrow 0 < a.b^{-1})$
4. $-n < 0 < n$, pour tout nombre naturel non nul n .

Exemples de corps commutatifs ordonnés : $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$, $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1, <)$.

Question : Est-ce que les sous-groupes additif (respectivement multiplicatif) d'un corps ordonné sont des groupes ordonnés ?

Notation 3.1.1 Soit K un corps commutatif. Soit $A \subset K$, on note $A^* := A - \{0\}$.

Un corps ordonné $(K, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ est *archimédien* si pour tout $0 < x < y$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < y < n.x$.

Exercice : Montrer que cette propriété n'est pas exprimable par un énoncé.

Proposition 3.1.2 *Tout corps ordonné archimédien se plonge comme $\mathcal{L}_{an, <}$ -structure dans $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, 0, 1)$.*

Preuve : On montre tout d'abord que \mathbb{Q} est dense dans tout corps ordonné archimédien K . Ensuite on définit le plongement de $K - \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} en envoyant un élément a de K vers le réel qui réalise la même coupure que a dans \mathbb{Q} . \square

Définition 3.1.5 Dans un corps ordonné $(K, +, -, \cdot, <, 0, 1)$, on introduit la relation d'équivalence suivante

$$r \sim s \text{ ssi } \exists n \in \mathbb{N} \quad n.|r| \geq |s| \ \& \ n.|s| \geq |r|.$$

Exercice : Etant donné $r \in K$ on note la classe d'équivalence qui contient r par r_{\sim} . Montrez que si $r_1 \sim r_2$ et $s_1 \sim s_2$, alors $r_1.s_1 \sim r_2.s_2$ et que si $0 < r < u < s$ et $r \sim s$, alors $u \sim r$. Soit $G := \{r_{\sim} : r \in K - \{0\}\}$. Montrer que G peut être muni d'une loi de groupe et d'une relation d'ordre tel que ce soit un groupe abélien totalement ordonné.

Définition 3.1.6 Soit $(A, +, -, \cdot, 0, 1)$ un anneau commutatif. Une partie P de A est appelée cône si $P + P \subset P$, $P.P \subset P$, $A^2 \subset P$, $-1 \notin P$.

Remarque : si $P \cap -P \neq \emptyset$, alors il existe $p_1, p_2 \in P$ tel que $p_1 = -p_2$ et donc $0 \in P$.

Exercice : Si $A = -P \cup P$, alors $P \cap -P$ est un idéal de A .

Définition 3.1.7 Soit $(A, +, -, \cdot, 0, 1)$ un anneau commutatif et $P \subset A$. Si en outre $A = -P \cup P$ et si $P \cap -P$ est un idéal premier de A , on dira que P est un *cône positif* de A .

Remarque : si A est un corps, et P un cône, alors $P \cap -P = \{0\}$ et c'est donc un idéal premier.

Exercice : Soit $(K, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ un corps commutatif ordonné. Montrer que l'ensemble de ses éléments positifs forme un cône positif.

Remarque : Si -1 est une somme de carrés, et si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, alors tout élément de K est une somme de carrés. (On écrit $a := \frac{(1+a)^2}{2} - \frac{(1-a)^2}{2}$).

Lemme 3.1.3 Soit $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ un corps commutatif et soit P un cône positif de K . On note $a <_P b$ si $b - a \in P$ & $b \neq a$. La relation $<_P$ est une relation d'ordre total. \square

Définition 3.1.8 On dira que le corps commutatif K est *ordonnable* s'il existe $P \subset K$ un cône positif.

Remarque : un corps peut avoir plusieurs cônes positifs différents.

Soit $\mathbb{Q}[t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans \mathbb{Q} . Soit $P := \{q \cdot (\sum_{i=0}^{d-1} t^i \cdot q_i + t^d); q \in \mathbb{Q}_{>0}, d \geq 0\}$.

Soit $\mathbb{Q}(t)$ le corps des fractions rationnelles ; on ordonne $\mathbb{Q}(t)$ de la façon suivante. On pose $Q := \{\frac{p_1(t)}{p_2(t)^2} : p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{Q}[t] p_2(t) \neq 0 \text{ \& } p_1(t) \in P\}$.

Exercice : Montrer que P est un cône positif de $\mathbb{Q}[t]$. Montrer que Q est un cône positif de $\mathbb{Q}(t)$. Remarque que dans l'ordre induit, on a $\mathbb{Q} <_P t$. Y-a-t-il d'autres cônes positifs ?

Soit $\mathbb{Q}((t))$ le corps des séries de Laurent. Soit $a := \sum_{i \geq i_0} t^i \cdot a_i \in \mathbb{Q}((t))$, où $a_i \in \mathbb{Q}, a_{i_0} \neq 0, i \in \mathbb{Z}$. On peut écrire cet élément de la façon suivante : $a = a_{i_0} \cdot t^{i_0} \cdot (1 + \sum_{i > i_0} t^{i-i_0} \cdot a_i \cdot a_{i_0}^{-1})$. Posons $R := \{a_{i_0} \cdot t^{i_0} \cdot (1 + \sum_{i > i_0} t^{i-i_0} \cdot a_i \cdot a_{i_0}^{-1}) : a_{i_0} \in \mathbb{Q}_{>0}\}$.

Exercice : Montrer que R est un cône positif de $\mathbb{Q}((t))$.

Définition 3.1.9 Soit $\sum K^2 := \{\sum_{i=0}^n a_i^2 : i \in \mathbb{N}, a_i \in K\}$. Un corps commutatif K est formellement réel si $-1 \notin \sum K^2$.

Exercice : Si K est formellement réel, alors K est de caractéristique 0.

Lemme 3.1.4 Tout corps ordonnable est formellement réel.

Preuve : Soit P un cône positif de K . On a donc $\sum K^2 \subset P$ et supposons que $-1 \in \sum K^2$. Donc $-1 \in P \cap -P$ car $1 = 1^2 \in P$ (et donc $-1 \in -P$).

(On aurait pu aussi utiliser le fait que tout élément est une somme de carrés (K étant de caractéristique 0) et donc la relation $<_P$ ne serait pas anti-symétrique.) \square

Remarques : Ceci montre en particulier que \mathbb{C} n'est pas ordonnable (ainsi que tout corps algébriquement clos).

Aucun des corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques n'est ordonnable.

Dans un corps PAC de caractéristique $\neq 2$, tout élément est une somme de deux carrés.

Proposition 3.1.5 *Un corps formellement réel est ordonnable.*

Lemme 3.1.6 *Si P_0 est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(K^*, \cdot, 1)$ de K et si P_0 est clos par $+$ et contient $(K^2)^*$, alors s'il existe $a \neq 0$, $-a \notin P_0$, alors $P_1 := P_0 + a.P_0$ est un sous-groupe de $(K^*, \cdot, 1)$ clos par $+$, où $P_0 + a.P_0 := P_0 \cup a.P_0 \cup \{b + a.c : b, c \in P_0\}$.*

Preuve : Comme P_0 est clos par $+$, P_1 est clos par $+$; P_1 est clos par \cdot car P_0 l'est, $a^2 \in P_0$ et $(b + a.c).(b_1 + a.c_1) = (b.b_1 + a^2.c.c_1) + a.(c.b_1 + b.c_1)$. Si $0 \in P_1$ alors $-a = c.b^{-1}$, mais cela impliquerait que $-a \in P_0$. Calculons l'inverse de $(b + a.c)^{-1} = (b + a.c).(b + a.c)^{-2}$. \square

Preuve de la Proposition : Soit K un corps formellement réel. Montrons que K a un cône positif.

On utilise le Lemme de Zorn sur l'inductif suivant (\mathcal{S}, \subseteq) où \mathcal{S} est l'ensemble des sous-groupes de $(K^*, \cdot, 1)$ stables par $+$ et qui contiennent $(K^2)^*$. Cet ensemble de parties est non vide car K est formellement réel et donc $(\sum K^2)^*$ est dans cet ensemble de parties (en effet $(\sum K^2)^*$ est fermé par \cdot , $^{-1}$ et $+$: si une somme de carrés non nuls était égale à 0, alors -1 serait une somme de carrés) et \mathcal{S} est fermé par unions de chaînes.

Soit S_{max} un élément maximal de \mathcal{S} . Par le Lemme, pour tout élément a non nul de K soit appartient à S_{max} , soit $-a \in S_{max}$. Sinon, comme $S_{max} + a.S_{max} \in \mathcal{S}$, cela contredirait la maximalité de S_{max} . Finalement $S_{max} \cup \{0\}$ est un cône positif de K . \square

Définition 3.1.10 Un élément a d'un corps K est *totalelement positif* si $a > 0$ pour tout ordre $<$ de K . (Si K n'a d'ordre, alors tout élément est totalelement positif).

3.2 Clôture réelle et axiomatisation.

Lemme 3.2.1 *Soit K un corps de caractéristique différente de 2, alors tout élément a non nul de K est totalelement positif ssi a est une somme de carrés.*

Preuve : Si a est une somme de carrés, il est positif pour tout ordre sur K .

Supposons maintenant que a n'est pas une somme de carrés et montrons qu'il existe un ordre $<$ sur K tel que $a < 0$.

Soit \tilde{K} une clôture algébrique de K et on considère les sous-corps de \tilde{K} contenant K où a n'est pas une somme de carrés. Par le lemme de Zorn, il y a un tel corps maximal, disons R . Ce corps est nécessairement formellement réel (sinon tout élément serait une somme de carrés) et donc est ordonnable, notons un ordre sur R : $<_R$. On va montrer que dans R , $-a$ est un carré et donc $a <_R 0$. Par restriction sur K , on aura trouvé un ordre où a est négatif.

Si $-a$ n'est pas un carré dans R , le polynôme $X^2 + a$ est irréductible et l'extension $R[X]/(X^2 + a)$ est un corps contenant strictement R et par unicité de la clôture algébrique plongé dans \tilde{K} . Notons ce corps : $R(\sqrt{-a})$; par maximalité de R , a est une somme de carrés dans $R(\sqrt{-a})$: $a = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i.\sqrt{-a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 - a.b_i^2) + \sqrt{-a}.\sum_{i=1}^n 2.a_i.b_i$, et donc $a.(1 + \sum_{i=1}^n b_i^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2$ et $\sum_{i=1}^n 2.a_i.b_i = 0$. Ainsi, a est une somme de carrés dans R : $a = \sum_{i=1}^n a_i^2.(1 + \sum_{i=1}^n b_i^2).(1 + \sum_{i=1}^n b_i^2)^{-2}$, une contradiction. \square

Définition 3.2.1 Un corps commutatif K totalelement ordonné est réel-clos si tout élément positif est un carré et si tout polynôme de degré impair a une racine.

Notation 3.2.1 On notera *RCF* l'ensemble des axiomes suivants (qui axiomatise la théorie des corps réels-clos dans le langage $\mathcal{L}_{an,<}$).

1. les axiomes de corps commutatifs ordonnés,
2. $\forall x (x > 0 \rightarrow \exists y x = y^2)$
3. pour chaque naturel $n \in \mathbb{N}$, l'axiome

$$\forall a_0 \forall a_1 \cdots \forall a_{2n} \exists x \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i + x^{2n+1} = 0.$$

Remarque :

Dans un corps réel-clos, il y a un seul ordre et la relation d'ordre $a < b$ est définissable par la formule $\exists y y^2 = b - a \ \& \ a \neq b$. On s'autorisera donc de parler de *corps réels clos* sans nécessairement mentionner la relation d'ordre.

Proposition 3.2.2 *Un modèle de RCF est la structure : $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$.*

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Considérons la fonction polynômiale $x \rightarrow x^2 - a$. En 0 elle est négative et en $a + 1$ elle est positive. Cette fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui envoie x sur $x^2 - a$ est une fonction continue qui change de signe entre 0 et $a + 1$ et donc a un zéro entre ces deux bornes.

Soit $p(x)$ un polynôme de degré impair. La fonction polynomiale correspondante change de signe entre $-\infty$ et $+\infty$ et donc a au moins un zéro dans \mathbb{R} , par le théorème des valeurs intermédiaires. \square

Théorème 3.2.3 *Si K est réel-clos, alors $K(i)$, où $i^2 = -1$, est algébriquement clos.*

Preuve : (Esquisse.)

La preuve est similaire à celle qui montre que $\mathbb{R}(i)$ est un corps a.c.

Tout d'abord i ne peut appartenir à un corps formellement réel. On a donc un auto σ non trivial de $K(i)$ qui envoie $a + b.i$ sur $a - b.i$ tel que $Fix(\sigma) = K$. Si $f(x) \in K(i)[x]$, alors $f.f^\sigma \in K[x]$ et donc si $f.f^\sigma$ a une racine, f a une racine.

Donc il suffit de montrer qu'un polynôme à coefficients dans K a une racine dans $K(i)$. On utilise le fait suivant.

Tout élément de $K(i)$ a une racine carrée dans $K(i)$.

Ensuite on utilise la théorie de Galois. On utilise un des théorèmes de Sylow qui dit qu'un groupe d'ordre $2^s.m$, où $(2, m) = 1$, a un sous-groupe d'ordre 2^s . De plus, un groupe d'ordre 2^s est nilpotent (et donc résoluble). \square

Proposition 3.2.4 *Soit $(K, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ un corps commutatif totalement ordonné.*

$K \models RCF$ ssi tout polynôme (à coefficients dans K) qui change de signes a un zéro dans K .

Preuve : (\rightarrow) Soient $a, b \in K$. Notons $a - bi := \overline{a + b.i}$, c'est un automorphisme de $K(i)$ (à vérifier) et si $q(x) = \sum_{j=0}^d x^j.c_j \in K(i)[x]$, notons $\bar{q}(x) := \sum_{j=0}^d x^j.\bar{c}_j$.

Soit $p(x) \in K[x]$ et supposons que $p(x)$ change de signes. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p(x)$ est monique (pourquoi). Par le théorème ci-dessus, $K(i)$ est

algébriquement clos et donc $p(x)$ se factorise en facteurs linéaires (i.e. de degré 1) et donc de la forme $(x - \alpha)$, où $\alpha = a + b.i$, $a, b \in K$. Si $p(\alpha) = 0$, alors $\bar{p}(\alpha) = 0$. Or, $\bar{p}(\alpha) = \bar{p}(\bar{\alpha})$ et comme $p(x) \in K[x]$, $\bar{p}(x) = p(x)$. Donc si α est un zéro de $p(x)$, alors $\bar{\alpha}$ est un zéro de $p(x)$ et si $\alpha \notin K$, $\bar{\alpha} \neq \alpha$.

Donc, si $(x - \alpha)$ est un facteur de $p(x)$ et si $\alpha \notin K$ (et donc $b \neq 0$), alors $p(x)$ a aussi un facteur du type $(x - \bar{\alpha})$. Donc $p(x)$ a un facteur du type $x^2 - 2a + a^2 + b^2 = (x - a)^2 + b^2$ qui ne prend que des valeurs strictement positives puisque l'on a supposé que $b \neq 0$. Donc si $p(x)$ change de signes, il a nécessairement un facteur de la forme $(x - a)$, où $a \in K$.

(\leftarrow) Pour les polynômes de degré impair c'est immédiat. Si $a > 0$, on considère le polynôme $x^2 - a$; ou bien $a > 1$ et donc $a^2 > a$ et donc ce polynôme est négatif en 0 et positif en a , ou bien $0 < a < 1$, et donc $a^2 < a$ et donc le polynôme est positif en 1 et négatif en a . \square

Théorème 3.2.5 *Un corps commutatif $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ est réel-clos ssi K est formellement réel et s'il n'a aucune extension algébrique propre qui soit formellement réelle.*

La preuve s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 3.2.6 *Si F est un corps formellement réel, alors $F(r)$ est formellement réel dans les deux cas suivants : soit $r^2 = a$ où $a > 0$, $a \in F$, soit r est algébrique sur F et son polynôme minimal est de degré impair.*

Preuve : On procède par l'absurde et dans le deuxième cas par induction sur le degré du polynôme minimal.

Soit $r^2 = a$ avec $a > 0$ et supposons que $F(r)$ ne soit pas formellement réel et donc $r \notin F$. Alors il existe $a_i, b_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, tels que $-1 = \sum_{i=1}^n (a_i + r.b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2.a + r.(\sum_{i=1}^n 2.a_i.b_i)$. Comme $r \notin F$, $\sum_{i=1}^n 2.a_i.b_i = 0$ et $-1 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2.a > 0$, une contradiction.

Soit $f(x)$ un polynôme minimal de r de degré impair et supposons que $F(r)$ ne soit pas formellement réel. On a donc $-1 = \sum_{i=1}^n g_i(r)^2$, où $g_i(x) \in F[x]$ est un polynôme de degré strictement plus petit que le degré de $f(x)$. On a donc que $f(x)$ divise $1 + \sum_{i=1}^n g_i(x)^2$. Il existe donc $h(x)$ tels que $h(x).f(x) = 1 + \sum_{i=1}^n g_i(x)^2$. Comme le degré de $1 + \sum_{i=1}^n g_i(x)^2$ est de la forme $2.m$, où $m < \deg(f)$, le degré de h est impair et strictement plus petit que celui de f . Si $h(x)$ a un facteur irréductible $h_1(x)$ dans $F[x]$ de degré impair. Soit s un zéro de $h_1(x)$, par hypothèse d'induction on a que $F(s)$ est formellement réel mais dans $F(s)$, on a $-1 = \sum_{i=1}^n g_i(s)^2$, une contradiction. \square

Preuve du théorème :

(\rightarrow) Si K est réel-clos, alors $K(i)$ est algébriquement clos et donc toute extension algébrique de K se plonge dans $K(i)$. Si K avait une extension algébrique propre, alors cette extension serait égale à $K(i)$ qui n'est pas formellement réel car $i^2 = -1$.

(\leftarrow) Cela découle du lemme.

Définition 3.2.2 Soit $(K, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ un corps totalement ordonné, le corps totalement ordonné $(K^r, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ est une clôture réelle de K si

$(K, +, \cdot, <, 0, 1)$ est une sous-structure de $(K^r, <, +, \cdot, 0, 1)$,

K^r est une extension algébrique de K et

K^r est réel-clos.

Existence et unicité de la clôture réelle.

On utilise le théorème de Sturm qui détermine de façon algorithmique le nombre de zéros d'un polynôme $p(x) \in K[x]$. On associe à $p(x) := x^n + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x^{n-i}$ une suite de polynômes construite de la façon suivante : $p_0(x) = p(x)$, $p_1 = p'(x)$ (la dérivée de $p(x)$ par rapport à x), $p_{i-1}[x] = q_i[x] \cdot p_i[x] - p_{i+1}[x]$ avec $\deg(p_{i+1}) < \deg(p_i)$, soit s tel que $p_{s-1}(x) = q_s(x) \cdot p_s(x)$ et $p_{s+1} = 0$.

Remarque : Soit $p(x) \in K[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$, $a_n \neq 0$. Soit a tel que $p(a) = 0$. Alors, $|a| \leq \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|}\}$.

Proposition 3.2.7 Théorème de Sturm ([3] Theorem 5.4 page 312). *Soit K un corps réel-clos, et soit $p(x) \in K[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$, $a_n \neq 0$. Alors le nombre de racines distinctes de $p(x)$ dans K est égal à $V_{-M} - V_M$, où V_c est le nombre de variations de signes dans la suite $(p_0(c), p_1(c), \dots, p_s(c))$ et $M = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|}$.*

Corollaire 3.2.8 *Soient $\mathcal{K}_1 := (K_1, +, \cdot, 0, 1, <)$ et $\mathcal{K}_2 := (K_2, +, \cdot, 0, 1, <)$ deux corps ordonnés, inclus respectivement dans R_1 et R_2 deux corps réels-clos. Soit σ un isomorphisme de \mathcal{K}_1 dans \mathcal{K}_2 . Soit $p(x)$ un polynôme monique dans $K_1[x]$ et $p^\sigma(x)$ son image dans $K_2[x]$. Alors le nombre de racines (distinctes) de $p(x)$ dans R_1 et le nombre de racines (distinctes) de $p^\sigma(x)$ dans R_2 est le même.*

Théorème 3.2.9 ([4] Theorem 11.4, page 656.) *Tout corps ordonné K a une clôture réelle K^r . Si K_1 et K_2 sont deux corps ordonnés avec comme clôture réelle R_1 et R_2 respectivement, alors tout isomorphisme entre les $\mathcal{L}_{an, <} : (K_1, +, -, \cdot, 0, 1)$ et $(K_2, +, -, \cdot, 0, 1)$ a une unique extension à un isomorphisme de $(R_1, +, -, \cdot, 0, 1)$ sur $(R_2, +, -, \cdot, 0, 1)$.*

Preuve : Par le théorème de Steinitz 2.1.3, K a une clôture algébrique \tilde{K} , unique à isomorphisme près. Soit K' le sous-corps de \tilde{K} contenant K et maximal pour la propriété d'être formellement réel. Pour montrer que ce corps est réel-clos, on utilise le théorème 3.2.5.

L'unicité se montre en utilisant le corollaire ci-dessus. Supposons que l'on ait déjà construit un isomorphisme σ de corps ordonnés entre F_1 et F_2 où $K_1 \subset F_1 \subset R_1$ et $K_2 \subset F_2 \subset R_2$ et soit $a \in R_1 - F_1$. On considère son polynôme minimal $p(x)$ sur F_1 et le polynôme p^σ sur F_2 . Par le théorème de Sturm et le fait que σ soit un isomorphisme de corps ordonnés, ces deux polynômes ont le même nombre de racines (distinctes) dans R_1 et R_2 . Supposons que a soit la k^{ieme} racine de $p(x)$ dans R_1 . On prolonge σ à $F_1(a)$ en envoyant a sur la k^{ieme} racine de $p^\sigma(x)$ dans F_2 . Il reste à montrer que cette application est bien un morphisme et qu'elle est unique. \square

Remarque : Soient $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{t})$ et $K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{-t})$, où t est transcendant sur \mathbb{Q} , deux extensions ordonnées de \mathbb{Q} , l'une où $t >_{K_1} 0$ et l'autre où $t <_{K_2} 0$. Soient F_1 , respectivement F_2 les clôtures réelles de K_1 , respectivement K_2 . La proposition précédente devient fausse si on omet l'hypothèse : tout iso entre K_1 et K_2 qui respecte l'ordre. En effet, les clôtures réelles de $\mathbb{Q}(\sqrt{t})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-t})$, où t est transcendant sur \mathbb{Q} , ne sont pas isomorphes, puisque dans l'une $t > 0$ et dans l'autre $t < 0$.

Chapitre 4

Elimination des quantificateurs

4.1 Ensembles définissables.

Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure. Nous allons (rapidement) voir ici la notion d'ensembles définissables et de types que nous reverrons de façon plus abstraite dans les sections 6.2, 6.3.

Définition 4.1.1 Un sous-ensemble S d'un produit cartésien A^n de A (pour un certain $n \in \mathbb{N} - \{0\}$) est *définissable* s'il existe une \mathcal{L} -formule $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ et un uple \bar{d} d'éléments de A telle que $S = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \mathcal{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n, d_1, \dots, d_m)\}$. (On utilisera la notation $S = \psi(A, \bar{d})$ ou $\psi(A^n, \bar{d})$). On notera l'ensemble de ces sous-ensembles par $Def(\mathcal{A})$.

On dira que S est définissable sans paramètres (dans \mathcal{A}) (ou \emptyset -définissable) s'il existe une \mathcal{L} -formule $\phi(\bar{x})$ telle que $S = \phi(A)$. Plus généralement, si on restreint l'ensemble des paramètres à un sous-ensemble de C de A , on note l'ensemble correspondant par $Def_C(\mathcal{A})$.

Si on se restreint aux sous-ensembles définissables, à paramètres dans C , d'un produit cartésien fixé A^n de A , on note l'ensemble de ces sous-ensembles définissables par $Def_C^n(\mathcal{A})$. Cet ensemble est stable par intersection finie, union finie et complément. On notera $\mathcal{B}_C^n(A)$ l'algèbre de Boole $(Def_C^n(\mathcal{A}), \cap, \cup, -, 0, 1)$. (La notion d'algèbre de Boole est rappelée dans l'Appendice A.)

Un sous-ensemble de A^n est *infinitement* définissable (à paramètres dans C) si c'est une intersection infinie d'ensembles définissables (à paramètres dans C).

On dira une *fonction* est définissable si son graphe l'est.

Un n -type $p(\bar{x})$ est un sous-ensemble de \mathcal{L} -formules à n -variables libres consistant ; il est complet s'il est maximal pour cette propriété. Soit T une théorie consistante, on note $S_n(T)$ l'ensemble des n -types complets contenant T .

Exercices : Soit $\mathcal{L}_{an} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.

- Décrire les sous-ensembles de $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ définissables par une \mathcal{L}_{an} -formule sans quantificateurs et sans paramètres et ensuite avec paramètres dans \mathbb{C} .

- Décrire les sous-ensembles définissables de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ sans quantificateurs, à paramètres dans \mathbb{R} .

Exemples dans la structure $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$.

- Les fonctions polynomiales sont \mathcal{L}_{an} -définissables.

• La fonction exponentielle $z \rightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ n'est pas \mathcal{L}_{an} -définissable, ce qui veut dire que son graphe (qui est un sous-ensemble de \mathbb{C}^2) n'est pas définissable.

En effet, considérons l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\} = \{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathbb{Z}\}$. ; il est infini ainsi que son complémentaire. Or si cet ensemble était \mathcal{L} -définissable il serait soit fini soit cofini (là on utilise le fait que le corps des complexes a l'élimination des quantificateurs dans le langage \mathcal{L} , (voir Théorème 4.2.3).

Une autre façon de procéder est de remarquer que la \mathcal{L} -théorie du corps des complexes est *décidable* car complète et récursivement axiomatisable (voir).

Soit $\mathcal{L}_{an} \cup \{exp\}$. Dans ce nouveau langage, on définit les entiers par la formule $\forall z \forall w ((z^2 = -1 \ \& \ e^{w \cdot z} = 1) \rightarrow e^{x \cdot w \cdot z} = 1)$ (voir [6]) et la théorie de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ est indécidable. Donc, si la fonction e^z était définissable dans \mathcal{L}_{an} , cette formule définirait \mathbb{Z} dans \mathcal{L}_{an} , ce qui contredirait la décidabilité de la \mathcal{L} -théorie de \mathbb{C} (voir Corollaire 4.2.5).

Définition 4.1.2 Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures.

Un morphisme f de \mathcal{A} and \mathcal{B} est une application de A dans B telle que

1. $f(c^A) = c^B$, pour chaque constante c de \mathcal{L} ,
2. $f(R^A) \subset R^B$, pour chaque relation R de \mathcal{L} ,
3. $f(F^A(\bar{a})) = F^B(f(\bar{a}))$, pour chaque fonction F de \mathcal{L} et chaque uple d'éléments \bar{a} de A .

Un isomorphisme est un plongement surjectif.

On parle d'endomorphisme (respectivement d'automorphisme) pour un morphisme respectivement un isomorphisme lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Proposition 4.1.1 Soit S un sous-ensemble de A^n définissable à paramètres dans C . Alors S est laissé invariant par tous les automorphismes de \mathcal{A} qui sont l'identité sur C .

Preuve : Exercice. \square

Cette proposition a une réciproque, sous une hypothèse de saturation sur \mathcal{A} (une notion ultérieure vue dans le chapitre 6.3).

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et on considère les traces sur \mathcal{A} des ensembles définissables de \mathcal{B} . Différents phénomènes peuvent apparaitre. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur ω .

Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule et considérons les sous-ensembles $\phi(A, \bar{a})$, $\phi(B, \bar{b})$, où $\bar{a} \in A$ et $\bar{b} \in B$.

Par exemple, $\mathcal{L} := \{<\}$ et $\phi(x, y_1, y_2) = y_1 < x < y_2$.

Prenons $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^\omega / \mathcal{U}$, alors on a $\phi(\mathbb{R}, 0, 1) \subsetneq \phi(\mathbb{R}^\omega / \mathcal{U}, 0, 1)$. Mais si on considère $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{N}^\omega / \mathcal{U}$, on a que $\phi(\mathbb{N}, 0, 1) = \phi(\mathbb{N}^\omega / \mathcal{U}, 0, 1)$.

Considérons maintenant la trace sur A des sous-ensembles définissables à paramètres dans B . Dans le cas où pour chaque $n \geq 1$, $Def^n(\mathcal{B}) \cap A^n = Def(\mathcal{A})$, on dira que \mathcal{A} est *stablement plongé* dans \mathcal{B} .

Par exemple, si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux corps algébriquement clos, avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors \mathcal{A} est stablement plongé dans \mathcal{B} .

Par contre, $(\mathbb{Q}, <)$ n'est pas stablement plongé dans $(\mathbb{Q}^\omega / \mathcal{U}, <)$. En effet soit $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q_n - \sqrt{2} \leq 10^{-n}$. On considère la trace sur \mathbb{Q} de $\phi(\mathbb{Q}^\omega / \mathcal{U}, 0, [q_n]_{\mathcal{U}})$, i.e. le

sous-ensemble : $\phi(\mathbb{Q}^\omega/\mathcal{U}, 0, [q_n]_{\mathcal{U}}) \cap \mathbb{Q}$. On peut montrer que cet ensemble n'appartient pas à $Def((\mathbb{Q}, <))$.

Remarque : Il est facile de voir que $\bigcap_{n \in \omega}]0, q_n[_{\mathcal{U}}$ n'est pas un intervalle dont les extrémités appartiennent à \mathbb{Q} , mais pour montrer que ce n'est pas un sous-ensemble définissable de $(\mathbb{Q}, <)$, il faut pouvoir montrer que tout sous-ensemble définissable de $(\mathbb{Q}, <)$ est une union finie d'intervalles.

A un n -type $p(\bar{x})$ consistant avec une \mathcal{L} -théorie T et à \mathcal{M} un modèle de T , on fait correspondre une intersection infinie d'ensembles définissables (ou encore un ensemble *infiniment définissable*). Bien entendu dans ce modèle donné \mathcal{M} , cette intersection peut être vide, bien que toute sous-intersection finie soit non-vide.

Par exemple l'ensemble infiniment définissable : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[_{\mathcal{U}}$ est vide dans \mathbb{R} , non vide dans $\mathbb{R}^\omega/\mathcal{U}$. On notera

$$\mu := \{a \in \mathbb{R}^\omega/\mathcal{U} : \bigwedge_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}^\omega/\mathcal{U} \models -1/n < a < 1/n\}.$$

Exercice : En déduire que μ n'est pas définissable (sans paramètres) dans $\mathbb{R}^\omega/\mathcal{U}$. Montrer que μ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^\omega/\mathcal{U}, +, 0)$ mais que ce n'est pas une intersection de sous-groupes définissables.

4.2 Critères d'élimination des quantificateurs.

Dans certains cas, les sous-ensembles définissables d'une \mathcal{L} -structure (ou des modèles d'une \mathcal{L} -théorie T) peuvent être décrits de façon simple. Dans les corps algébriquement clos, les ensembles algébriques jouent un rôle particulier ; dans les corps réels-clos, ce sont les sous-ensembles semi-algébriques. Généralisons ces notions et définissons pour une théorie T ce que signifie *T a l'élimination des quantificateurs*.

Définition 4.2.1 Une \mathcal{L} -théorie consistante T a l'élimination des quantificateurs (e.q.) dans \mathcal{L} si pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$, il existe une \mathcal{L} -formule $\theta(x_1, \dots, x_m)$ sans quantificateurs, où $n \leq m$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m (\phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_m)).$$

Exercice : Montrer que lorsque \mathcal{L} contient des constantes, la définition ci-dessus est équivalente à celle où l'on suppose que la formule sans quantificateurs θ a le même nombre de variables libres que ϕ .

Lemme 4.2.1 Soit T une \mathcal{L} -théorie consistante. Alors, T a l'e.q. ssi pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ sans quantificateurs, il existe une \mathcal{L} -formule $\theta(x_1, \dots, x_m)$ sans quantificateurs, $n \leq m$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m (\exists x_0 \phi(x_0, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_m)).$$

Preuve : L'implication (\Rightarrow) est immédiate car il s'agit du cas particulier des formules existentielles. Prouvons l'implication (\Leftarrow) .

Sans perte de généralité, on peut supposer que les formules sont mises sous forme pré-nexe c.a.d. sous la forme $Q_1 y_1 \cdots Q_k y_k \rho(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n)$, où Q_i est soit \forall soit \exists et $\rho(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n)$ une \mathcal{L} -formule sans quantificateurs. On dira qu'une telle formule est de complexité $\leq k$ et on procède par induction sur k .

Le cas où $k = 0$ correspond au cas des formules sans quantificateurs.

Supposons l'implication montrée pour les formules de complexité $\leq \ell$, où $\ell \geq 0$ et montrons-la pour les formules de complexité $\leq \ell + 1$.

Soit ϕ est une formule de complexité $\leq \ell + 1$, mise sous la forme :

$$Q_1 y_1 \cdots Q_{\ell+1} y_{\ell+1} \psi(y_1, \dots, y_{\ell+1}, x_1, \dots, x_n),$$

où Q_i est soit \forall soit \exists et $\psi(x_1, \dots, x_n)$ une \mathcal{L} -formule sans quantificateurs.

Par hypothèse d'induction, il existe une \mathcal{L} -formule sans quantificateurs $\theta(y_1, x_1, \dots, x_k)$, $k \geq n$, telle que

$$T \models \forall y_1 \forall x_1 \cdots \forall x_k (Q_2 y_2 \cdots Q_{\ell+1} y_{\ell+1} \psi(y_1, y_2, \dots, y_{\ell+1}, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta(y_1, x_1, \dots, x_k)).$$

Il reste à montrer que $Q_1 y_1 \theta(y_1, x_1, \dots, x_k)$ est équivalente dans T à une formule sans quantificateurs.

Si Q_1 est le quantificateur \exists , par hypothèse, il existe une formule sans quantificateurs $\xi(x_1, \dots, x_m)$, $m \geq k \geq n$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m (\exists y_1 \theta(y_1, x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \xi(x_1, \dots, x_m)).$$

Si Q_1 est le quantificateur \forall , on ré-écrit la formule $\forall y_1 \theta(y_1, x_1, \dots, x_k)$ sous la forme $\neg(\exists \neg \theta(y_1, x_1, \dots, x_k))$. On applique l'hypothèse à la formule $\exists \neg \theta(y_1, x_1, \dots, x_k)$. Il existe donc une formule sans quantificateurs $\xi'(x_1, \dots, x_{m'})$, $m' \geq k \geq n$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m (\exists y_1 \neg \theta(y_1, x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \xi'(x_1, \dots, x_{m'})).$$

La négation d'une formule sans quantificateurs est toujours une formule sans quantificateurs, cela termine donc la preuve, car on a l'équivalence :

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m (\forall y_1 \theta(y_1, x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \neg \exists y_1 \neg \theta(y_1, x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \neg \xi'(x_1, \dots, x_{m'})).$$

□

Définition 4.2.2 Diagramme (élémentaire) d'une \mathcal{L} -structure \mathcal{A} .

Soit $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$, où c_a est un symbole de constante n'apparaissant pas dans \mathcal{L} .

On note $Diag(\mathcal{A})$ le diagramme (sans quantificateurs) de \mathcal{A} dans \mathcal{L}_A c.a.d. l'ensemble de tous les \mathcal{L}_A -énoncés *sans quantificateurs* vrais dans \mathcal{A} .

On note $Diag_{el}(\mathcal{A})$ le diagramme élémentaire de \mathcal{A} c.a.d. l'ensemble de tous les \mathcal{L}_A -énoncés vrais dans \mathcal{A} .

Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures. On dira que f est une application élémentaire de \mathcal{A} dans \mathcal{B} si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, pour tout $\bar{a} \subset A$, on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{A} \models \phi(\bar{a}) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \phi(f(\bar{a})).$$

Exercice : Montrer que si \mathcal{B} est une \mathcal{L}_A -structure satisfaisant $Diag(\mathcal{A})$, alors l'application $A \rightarrow B : a \rightarrow c_a^{\mathcal{B}}$ un monomorphisme de \mathcal{A} dans \mathcal{B} et que si $\mathcal{B} \models Diag_{el}(\mathcal{A})$, ce monomorphisme est une application élémentaire.

Théorème 4.2.2 (Critère d' e.q. formule par formule) *Soit \mathcal{L} un langage contenant au moins un symbole de constante. Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente et soit $\phi(x_1, \dots, x_n)$ une \mathcal{L} -formule où $n \geq 0$. Alors sont équivalentes :*

1. *il y a une \mathcal{L} -formule sans quantificateurs $\psi(x_1, \dots, x_n)$ telle que*

$$T \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

2. *pour toute paire de modèles \mathcal{A}, \mathcal{B} de T et toute sous-structure \mathcal{C} de \mathcal{A} et de \mathcal{B} , on a pour tout $\bar{a} \subset \mathcal{C}$, l'équivalence suivante $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{B} \models \phi(\bar{a})$.*

Preuve :

(1) implique (2) (exercice).

(2) implique (1). Soit $\Gamma(\bar{x})$ l'ensemble des formules sans quantificateurs impliquées dans les modèles de T par $\phi(\bar{x})$ c.a.d.

$\Gamma(\bar{x}) := \{\gamma(\bar{x}) : T \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \rightarrow \gamma(\bar{x}))\}$, où $\gamma(\bar{x})$ est sans quantificateurs}.

Soit $\bar{d} := (d_1, \dots, d_n)$ des symboles pour n nouvelles constantes.

• Supposons qu'il existe une $\mathcal{L}_{\bar{d}} := \mathcal{L} \cup \{d_1, \dots, d_n\}$ -structure \mathcal{A} modèle de $T \cup \Gamma(\bar{d})$ où $\neg\phi(\bar{d})$ est vraie (1).

Soit \mathcal{C} la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par \bar{d} (si $n = 0$, on considère la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par les constantes de \mathcal{L} .) On notera $Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C})$ le diagramme sans quantificateurs de \mathcal{C} dans $\mathcal{L}_{\bar{d}}$.

• Montrons que la $\mathcal{L}_{\bar{d}}$ -théorie $T(\bar{d}) := T \cup Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C}) \cup \{\phi(\bar{d})\}$ est inconsistente

Sinon, il y aurait un modèle \mathcal{B} de T contenant \mathcal{C} où $\phi(\bar{d})$ est vraie. Par ailleurs, \mathcal{A} contient \mathcal{C} et satisfait $\neg\phi(\bar{d})$ ce qui contredit l'hypothèse sur ϕ .

• Comme $T(\bar{d})$ est inconsistente, on a que $T \cup Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C}) \models \neg\phi(\bar{d})$ et donc par le théorème de compacité, il existe $\psi_1(\bar{d}), \dots, \psi_m(\bar{d})$ appartenant à $Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C})$ (2) telles que $T \models (\bigwedge_{i=1}^m \psi_i(\bar{d})) \rightarrow \neg\phi(\bar{d})$. Ainsi, $T \models \forall \bar{x} (\bigwedge_{i=1}^m \psi_i(\bar{x}) \rightarrow \neg\phi(\bar{x}))$. En prenant la contraposée, on obtient $T \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \rightarrow (\bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{x})))$. Donc, $\bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{d}) \in \Gamma(\bar{d})$. Mais $\mathcal{A} \models T \cup \Gamma(\bar{d})$ et donc $\mathcal{A} \models \bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{d})$. Or \mathcal{C} est une sous-structure de \mathcal{A} , $\mathcal{C} \models \bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{d})$, une contradiction avec (2).

• Et donc la situation (1) n'apparaît jamais. Autrement dit, $T \cup \Gamma(\bar{d}) \models \phi(\bar{d})$. Par le théorème de compacité, il existe un nombre fini de formules (sans quantificateurs) $\gamma_1(\bar{x}), \dots, \gamma_k(\bar{x})$ appartenant à $\Gamma(\bar{x})$ telles que

$$T \cup \{\gamma_1(\bar{d}), \dots, \gamma_k(\bar{d})\} \models \phi(\bar{d}).$$

Comme \bar{d} sont des constantes n'appartenant pas à \mathcal{L} , cela implique que

$$T \models \forall x \left(\bigwedge_{j=1}^k \gamma_j(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}) \right).$$

Par choix de $\Gamma(\bar{x})$, on obtient :

$$T \models \forall x \left(\bigwedge_{j=1}^k \gamma_j(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}) \right).$$

□

Théorème 4.2.3 (Tarski) *ACF admet l'élimination des quantificateurs dans \mathcal{L}_{an} .*

Preuve : On applique le critère précédent aux formules existentielles $\exists x\phi(x, \bar{a})$, où $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs, et on termine la preuve en utilisant le Lemme 4.2.1.

Soient $\mathcal{K}_1 := (K_1, +, -, \cdot, 0, 1)$ et $\mathcal{K}_2 := (K_2, +, -, \cdot, 0, 1)$ deux \mathcal{L}_{an} -structures modèles de *ACF* contenant \bar{a} et soit F le sous-corps de K_1 et K_2 , engendré par \bar{a} . Remarquons que K_1 et K_2 sont infinis.

Supposons qu'il existe $b \in K_1$ tel que $\mathcal{K}_1 \models \phi(b, \bar{a})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est de la forme $\bigwedge_{i \in I} p_i(x, \bar{y}) = 0 \ \& \ q(x, \bar{y}) \neq 0$. Soit \tilde{F} la clôture algébrique de F que l'on plonge dans K_1 et dans K_2 .

Si I est non vide et s'il existe $i \in I$ tel que $p_i(x, \bar{a}) \in \mathbb{Q}(\bar{a})[x] - \{0\}$, b est algébrique sur F et on peut supposer qu'il appartient à $\tilde{F} \subset K_2$ et donc à K_2 .

Si I est vide, comme $\mathcal{K}_1 \models \phi(b, \bar{a})$, le polynôme $q(x, \bar{a})$ est non-trivial et donc n'a qu'un nombre fini de zéros dans K_2 et donc il suffit de prendre $c \in K_2$ différent de ces zéros et on aura $\mathcal{K}_2 \models \phi(c, \bar{a})$. □

Lemme 4.2.4 *Soit T une théorie complète et récursive. Alors T est décidable.*

Preuve : Par hypothèse T est un ensemble récursif d'énoncés et comme cette théorie est complète, l'ensemble des conséquences de T est récursif (autrement dit, T est décidable).

Soit σ un énoncé. Comme T est complète, on sait que soit σ soit $\neg\sigma$ est une conséquence de T . On énumère toutes les démonstrations de T et on vérifie si σ ou $\neg\sigma$ apparaissent dans la conclusion de ces démonstrations. On conclut en utilisant le fait que si un ensemble est récursivement énumérable (r.e.) ainsi que son complémentaire, alors il est récursif. □

Corollaire 4.2.5 *Les théories ACF_0 et pour chaque nombre premier p , ACF_p sont des théories complètes. La théorie ACF_0 axiomatise la théorie du corps des nombres complexes. La théorie ACF_p axiomatise la théorie de la clôture algébrique du corps \mathbb{F}_p . Ces théories ACF_0 et ACF_p , $p \in \mathcal{P}$, sont décidables.*

Preuve : Pour la première affirmation, il suffit de montrer que tout énoncé sans quantificateurs peut être mis sous la forme $1 + \dots + 1 = 0$.

La seconde découle du fait que \mathbb{C} (respectivement \mathbb{F}_p) est un modèle de ACF_0 (respectivement ACF_p).

La décidabilité de ces théories découle du Lemme 4.2.4. □

Définition 4.2.3 Soit T une théorie consistante. On dira que \mathcal{A} est un modèle premier de T s'il se plonge de façon élémentaire dans tout modèle de \mathcal{M} de T .

Soit $\mathcal{M} \models T$ et soit $B \subset M$. On dira que $\mathcal{M}_0 \models T$ est premier au-dessus de B si \mathcal{M}_0 se plonge de façon élémentaire dans tout modèle \mathcal{N} de T dans lequel B se plonge.

Corollaire 4.2.6 *La clôture algébrique $\tilde{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} est un modèle premier de ACF_0 . La clôture algébrique $\tilde{\mathbb{F}}_p$ de \mathbb{F}_p est un modèle premier de ACF_p .*

Preuve : Tout corps K de caractéristique 0 contient \mathbb{Q} et donc si K est un modèle de ACF , par l'unicité à isomorphisme près de la clôture algébrique, il contient $\tilde{\mathbb{Q}}$. Il reste à montrer que $\tilde{\mathbb{Q}} \prec K$. Soit $\phi(\bar{x})$ une \mathcal{L}_{an} -formule et soit \bar{a} un uple d'éléments de $\tilde{\mathbb{Q}}$. Par le théorème 4.2.3, on peut supposer que $\phi(\bar{x})$ est une formule sans quantificateurs et donc comme $\tilde{\mathbb{Q}}$ est un sous-corps de K , on a que $K \models \phi(\bar{a})$ ssi $\tilde{\mathbb{Q}} \models \phi(\bar{a})$.

La preuve est similaire, il suffit de remarquer que tout corps K de caractéristique p contient \mathbb{F}_p . \square

Théorème 4.2.7 (*Tarski*) RCF admet l'élimination des quantificateurs dans $\mathcal{L}_{an,<}$.

Preuve : On peut faire une preuve algorithmique de ce résultat (voir par exemple la preuve de Muchnik, vue dans le cours de Michaux).

Ici, on applique le critère précédent aux formules existentielles $\exists x \phi(x, \bar{a})$, où $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs, et on termine la preuve en utilisant le Lemme 4.2.1.

Soient $\mathcal{K}_1 := (K_1, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ et $\mathcal{K}_2 := (K_2, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ deux $\mathcal{L}_{an,<}$ -structures modèles de RCF contenant \bar{a} et soit F le sous-corps de K_1 et K_2 , engendré par \bar{a} .

Supposons qu'il existe $b \in K_1$ tel que $\mathcal{K}_1 \models \phi(b, \bar{a})$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est de la forme $\bigwedge_{i \in I} p_i(x, \bar{y}) = 0$ & $\bigwedge_{j \in J} q_j(x, \bar{y}) > 0$. Soit \tilde{F} la clôture réelle de F que l'on plonge dans K_1 et dans K_2 .

Si I est non vide et s'il existe $i \in I$ tel que $p_i(x, \bar{a}) \in \mathbb{Q}(\bar{a})[x] - \{0\}$, b est algébrique sur F et on peut supposer qu'il appartient à $\tilde{F} \subset K_2$ et donc à K_2 .

Sinon, $\phi(x, \bar{a})$ est équivalente à $\bigwedge_{j \in J} q_j(x, \bar{a}) > 0$. Chaque polynôme $q_j(x, \bar{a})$, $j \in J$, n'a qu'un nombre fini de racines dans \tilde{F} . Soient $a_1 < \dots < a_n$ (avec $n \leq \sum_j \deg_x q_j(x, \bar{y})$), les zéros dans \tilde{F} de cet ensemble fini de polynômes. Sur chaque intervalle ouvert de la forme : (a_i, a_{i+1}) ou $(-\infty, a_1)$ ou $(a_n, +\infty)$, chacun de ces polynômes a un signe constant. Comme $\mathcal{K}_1 \models \bigwedge_{j \in J} q_j(b, \bar{a}) > 0$, il existe un de ces intervalles où tous les $q_j(x, \bar{a})$ sont strictement positifs. et donc il suffit de choisir un élément $c \in \tilde{F}$ dans un de ces intervalles où tous les $q_j(x, \bar{a})$ sont positifs. (On prendra c , selon les cas, égal à $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$, $a_1 - 1$, $a_n + 1$.) \square

Remarque : RCF admet l'e.q. dans $\mathcal{L}_{an,<}$ mais pas dans \mathcal{L}_{an} . En effet l'ensemble des éléments positifs x est définissable par la formule $\exists y y^2 = x$, c'est un ensemble infini qui n'est pas cofini. Ce qui contredirait le fait que la \mathcal{L}_{an} -formule $\exists y y^2 = x$ soit équivalente à une \mathcal{L}_{an} -formule sans quantificateurs.

Définition 4.2.4 Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente. On dit que T est *modèle-complète* si pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ avec $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$, on a $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Exercice : Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente, montrer que si T a l'e.q., alors T est modèle-complète.

Exercice : Montrer que RCF est modèle-complète dans \mathcal{L}_{an} . (Pour axiomatiser RCF dans \mathcal{L}_{an} , on remplace tout élément positif est un carré par $\forall x \forall y \exists z x^2 + y^2 = z^2$ et on ajoute que $K^2 \cap -(K^2) = \{0\}$ et $K = K^2 \cup -(K^2)$.)

Pour faire l'exercice, on montre que dans RCF , la relation d'ordre $x < y$ est définissable par : $\exists z z^2 = y - x$ & $x \neq y$ et la négation $\neg(x < y)$ par $\exists z z^2 = x - y$ et donc toute formule dans RCF est équivalente à une formule existentielle.

Corollaire 4.2.8 *RCF est une théorie complète et décidable. La théorie du corps des réels est axiomatisée par RCF.*

Preuve : RCF est une théorie complète car tout énoncé est équivalent à une combinaison booléenne d'énoncés sans quantificateurs de la forme $m < n$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Comme RCF est un ensemble récursif, par le Lemme 4.2.4, elle est décidable.

Le corps \mathbb{R} est un modèle de RCF et comme RCF est une théorie complète, elle est égale à $Th(\mathbb{R})$. \square

4.3 Théories o-minimales

Définition 4.3.1 Soit $\mathcal{L}_< = \{<, \dots\}$, soit T est une $\mathcal{L}_<$ -théorie consistente. Elle est *o-minimale* si pour tout modèle \mathcal{M} de T , $Def_1(\mathcal{M})$ consiste en des sous-ensembles de M qui sont des unions finies d'intervalles.

Nous montrerons dans la Proposition 4.3.1 que RCF est une théorie o-minimale.

Remarque : Plus généralement, on peut définir des \mathcal{L} -théories T \mathcal{L}_0 -minimales où $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ lorsque pour tout modèle \mathcal{M} de T , $Def_1(\mathcal{M})$ consiste en des sous-ensembles de M qui sont des combinaisons booléennes de sous-ensembles de M définis par des \mathcal{L}_0 -formules atomiques.

Lorsque $\mathcal{L}_0 = \emptyset$, on dira que T est *fortement minimale*.

Exemple : ACF est fortement minimale (ça se montre utilisant que ACF a l'e.q. dans \mathcal{L}_{an} , ce qui peut se montrer suivant le même schéma que pour montrer que RCF a l'eq.)

Proposition 4.3.1 *RCF est une théorie o-minimale.*

Preuve : Soit $\mathcal{K} \models RCF$. Montrons que tout sous-ensemble définissable inclus à K (avec paramètres dans K) est une union finie d'intervalles.

Supposons que l'ensemble définissable soit de la forme $\phi(K, \bar{a})$. Par le Théorème 4.2.7, on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs : $\phi(x, \bar{y}) := \bigvee_k \bigwedge_j p_{jk}(x, \bar{y}) = 0 \ \& \ \bigwedge_\ell q_{\ell k}(x, \bar{y}) > 0$.

Il suffit de montrer que $\bigwedge_{j \in J} p_j(x, \bar{a}) = 0 \ \& \ \bigwedge_{\ell \in L} q_\ell(x, \bar{a}) > 0$ est une union finie d'intervalles. Ou bien $J \neq \emptyset$ et pour un indice $j \in J$, $p_j(x, \bar{a}) \in K[x] - \{0\}$ et donc $\phi(K, \bar{a})$ est un ensemble fini (et donc une union finie d'intervalles), ou bien soit pour tout $j \in J$, $p_j(x, \bar{a}) = 0$ ou $J = \emptyset$.

Dans ce cas, on énumère les zéros des polynômes $q_\ell(x, \bar{a})$, $\ell \in L$; disons $c_0 < \dots < c_m$. Dans chacun des intervalles ouverts $I_0 := (-\infty, c_0)$, \dots , $I_{r+1} := (c_r, c_{r+1})$, $0 \leq r \leq m-1$, $I_{m+1} := (c_m, \infty)$, les fonctions polynomiales $q_\ell(x, \bar{a})$ ne change pas de signe (sinon elles auraient un zéro). Notons ces intervalles I_r , $0 \leq r \leq m$. On construit un sous-ensemble V de $\{0, \dots, m+1\}$. Et donc soit sur l'intervalle I_r $q_\ell(x, \bar{a}) > 0$ et donc on met $r \in V$, soit $q_\ell(x, \bar{a}) < 0$ et on ne met pas $r \in V$. On a alors que dans ce cas, $\phi(K, \bar{a}) = \bigcup_{r \in V} I_r$. \square

Remarque : la théorie de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1, exp)$ est o-minimale (Wilkie, 1996). On montre que cette théorie est décidable, sous l'hypothèse de Schanuel.

Proposition 4.3.2 *Si \mathcal{M} est une structure o-minimale, alors toute coupure de M s'étend en un unique 1-type sur M .*

Preuve :

Soit $C_{A,B}$ une coupure (voir Definition 3.1.2) et soit $\phi(x, \bar{m})$ une formule à paramètres dans M consistente avec RCF . Par σ -minimalité, $\phi(M, \bar{m})$ est une union finie d'intervalles à extrémités dans M , disons $\phi(M, \bar{m}) = \cup_{i \in I} (a_i \ b_i)$, où I est fini, $a_i \leq b_i$ et $a_i, b_i \in M \cup \{+\infty, -\infty\}$, $i \in I$. On adopte la convention suivante : si $a_i = b_i$, alors $(a_i \ b_i) = \{a_i\}$ et si $a_i < b_i$, alors $(a_i \ b_i)$ est l'intervalle ouvert $]a_i \ b_i[$. Sans perte de généralité, on peut supposer que ces intervalles sont disjoints et on dira que $(a_i \ b_i)$ est un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$.

(Notons que si \mathcal{N} est une extension élémentaire de \mathcal{M} , alors $\phi(N, \bar{m}) = \cup_{i \in I} (a_i \ b_i)$, où I est fini, $a_i \leq b_i$ et $a_i, b_i \in M \cup \{+\infty, -\infty\}$ mais où $(a_i \ b_i)$ est maintenant un intervalle de N .)

Pour que $\phi(x, \bar{m})$ soit consistente avec $C_{A,B}$, il suffit que pour un indice $i \in I$, $a_i < a$ et $b_i > b$ pour certains $a \in A$, $b \in B$.

Supposons que $\phi(x, \bar{m})$ ne soit pas consistente avec $C_{A,B}$ et montrons que $\neg\phi(x, \bar{m})$ est consistente avec $C_{A,B}$.

Pour chaque $i \in I$, on a soit $a < a_i$ pour un certain $a \in A$, soit $b_i < b$ pour un certain $b \in B$. Dans le premier cas, comme $C_{A,B}$ n'est pas réalisé dans \mathcal{M} , il existe $b' \in B$ tel que $a < b' < a_i \leq b_i$ - on dira que l'intervalle $(a_i \ b_i)$ est à droite de la coupure-. Soit $i_0 \in I$ l'indice de I tel que tout autre intervalle $(a_i \ b_i)$ de $\phi(x, \bar{m})$ à droite de la coupure est plus grand que $(a_{i_0} \ b_{i_0})$ c.a.d. $(a_{i_0} \ b_{i_0}) < (a_i \ b_i)$.

Dans le deuxième cas où $b_i < b$, il existe $a' \in A$ tel que $a_i \leq b_i < a' < b$ - on dira que l'intervalle $(a_i \ b_i)$ est à gauche de la coupure-. Soit $i_1 \in I$ tel que tout autre intervalle $(a_i \ b_i)$ de $\phi(x, \bar{m})$ à gauche de la coupure est plus petit que $(a_{i_1} \ b_{i_1})$ c.a.d. $(a_i \ b_i) < (a_{i_1} \ b_{i_1})$.

Ou bien on a à la fois un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$ à gauche et à droite de la coupure $C_{A,B}$ et donc $(b_{i_1} \ a_{i_0})$ est inclus à $\neg\phi(x, \bar{m})$, ou bien il n'y a qu'un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$ à droite de la coupure et donc $(-\infty \ a_{i_0}) \subset \neg\phi(x, \bar{m})$, ou bien il n'y a qu'un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$ à gauche de la coupure et donc $(b_{i_1} \ +\infty) \subset \neg\phi(x, \bar{m})$. Dans chacun de ces trois cas, $\neg\phi(x, \bar{m})$ est consistente avec $C_{A,B}$. \square

Notation 4.3.1

On utilise l'abréviation : $\exists^=1 x \phi(x, \bar{y})$ pour $\exists x (\phi(x, \bar{y}) \ \& \ \forall z \phi(z, \bar{y}) \rightarrow x = z)$.

Exercice : Soit $\mathcal{M} \models RCF$ et soit $\phi(x, \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule. Soit $\bar{m} \subset M$. Montrer qu'il existe une \mathcal{L} -formule $\psi(x)$ tel que :

$$\mathcal{M} \models \forall x (\psi(x) \rightarrow \phi(x, \bar{m})) \text{ et } \mathcal{M} \models (\exists x \phi(x, \bar{m})) \rightarrow (\exists^=1 x \psi(x)).$$

Le théorème suivant résout le dix-septième problème d'Hilbert (1900), posé pour le corps des nombres réels.

Théorème 4.3.3 (Artin, 1927) *Si une fonction rationnelle $f(x_1, \dots, x_n)$ à coefficients dans un corps réel-clos K ne prend que des valeurs positives (lorsqu'elle est définie), elle peut s'écrire comme somme de carrés de fonctions rationnelles (à coefficients dans K).*

Preuve : On utilise la notion d'éléments totalement positifs. Supposons que f n'est pas une somme de carrés dans $K(x_1, \dots, x_n)$.

Alors par le Lemme 3.2.1, il existe un ordre sur $K(x_1, \dots, x_n)$ tel que $f < 0$. On écrit $f = \frac{g}{h} = \frac{g \cdot h}{h^2}$, où $g, h \in K[x_1, \dots, x_n]$. Donc, $g \cdot h < 0$. Soit R la clôture réelle de $K(x_1, \dots, x_n)$. On a $\mathcal{R} \models \exists x_1 \dots \exists x_n g(\bar{x})h(\bar{x}) < 0$ (ici on a considéré $g(\bar{x})$ (respectivement

$h(\bar{x})$) comme un terme de \mathcal{L}_{an} à paramètres dans K et donc le fait que l'élément $\frac{g}{h} \in R$ est négatif se traduit par cet \mathcal{L}_K -énoncé).

La théorie RCF a l'e.q. (dans $\mathcal{L}_{an,<}$) et donc $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$ implique que $\mathcal{K} \prec \mathcal{R}$. Donc $K \models \exists \bar{x} g(\bar{x}).h(\bar{x}) < 0$, on a donc trouvé un uple d'éléments de K où f est définie et négative, ce qui contredit l'hypothèse sur f . \square

Remarque : Si $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $f \geq 0$ sur \mathbb{R}^n , alors $f \in \sum \mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)^2$ ou encore il existe $g, f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tel que $g^2.f = f_1^2 + \dots + f_r^2$.

Chapitre 5

Théorèmes de Lowenheim-Skolem.

Dans cette deuxième partie du cours, nous allons étudier les propriétés abstraites de la classe des modèles d'une \mathcal{L} -théorie.

Les deux résultats principaux de ce chapitre sont les théorèmes de Lowenheim-Skolem. (Dans l'annexe B, on revoit quelques notions sur les ordinaux et les cardinaux).

Etant donné une \mathcal{L} -théorie consistente T qui a des modèles infinis, on montrera que pour chaque cardinal infini $\kappa \geq |\mathcal{L}| + \aleph_0$, on a un modèle de T de cardinalité κ .

Lorsque $T = RCF$, on a déjà vu quelques modèles de cardinalité différente : \mathbb{R} , \mathbb{Q}^{rc} , la clôture réelle de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , et en appliquant le théorème de Łos, n'importe quelle ultrapuissance non principale de \mathbb{R} .

5.1 Fonctions de Skolem.

Dans certaines constructions, il est parfois utile d'enrichir le langage de notre théorie en ajoutant de nouvelles fonctions au langage (les fonctions de *Skolem*) et d'enrichir ainsi la théorie en fabriquant sa *skolémissation*, tout en gardant la même classe de modèles.

Un procédé analogue qui consiste à ajouter de nouveaux symboles de relations, ce qui ne change pas la notion de sous-structures contrairement à la skolémissation (puisqu'on ajoute de nouveaux symboles de fonctions), est appelé la *Morleysation*.

On obtient ainsi des théories qui ont l'élimination des quantificateurs dans ce langage enrichi. (C'est pourquoi il est important de préciser dans les résultats sur l'élimination des quantificateurs quel est le langage considéré.)

Définition 5.1.1 Une \mathcal{L} -théorie T a des *fonctions de Skolem intrinsèques* si pour toute formule $\phi(v, \bar{w})$, il existe un symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$ tel que

$$T \models \forall w (\exists v \phi(v, \bar{w}) \rightarrow \phi(f(\bar{w}), \bar{w})).$$

T a des *fonctions de Skolem* si pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, il existe un \mathcal{L} -terme $t(\bar{x})$ tel que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \rightarrow \phi(\bar{x}, t(\bar{x}))).$$

Une *skolémissation* de T est une théorie T^+ dans un langage \mathcal{L}^+ étendant \mathcal{L} tel que tout modèle de T peut être étendu en un modèle de T^+ et pour toute \mathcal{L}^+ -formule $\phi(\bar{x}, y)$, où

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, il existe un \mathcal{L}^+ -terme $t(\bar{x})$ tel que

$$T^+ \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \rightarrow \phi(\bar{x}, t(\bar{x}))).$$

Remarque : ici on a enrichi le langage \mathcal{L} en un langage \mathcal{L}^+ et on a étendu une \mathcal{L} -structure modèle de T en une \mathcal{L}^+ -structure modèle de T^+ .

Inversement, étant donné un langage $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, on peut considérer une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} en tant que \mathcal{L}' -structure, que l'on notera : $\mathcal{M}|_{\mathcal{L}'}$.

Une conséquence du théorème suivant sera que l'on peut toujours enrichir le langage d'une théorie pour que celle-ci ait l'élimination des quantificateurs dans ce nouveau langage.

Théorème 5.1.1 *Une théorie T a toujours une expansion qui a des fonctions de Skolem intrinsèques.*

Commençons par donner une idée de la preuve.

1) Etant donné une \mathcal{L} -théorie T , on va tout d'abord rajouter un nombre infini dénombrable de symboles de fonctions à \mathcal{L} ; ceux-ci seront utilisés pour construire les fonctions de Skolem. En fait, quand on a un énoncé du type $\Psi := \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \Phi(x_1, \dots, x_n, y)$, on voudrait pouvoir exprimer le fait que la variable y dépend, en quelque sorte, des variables x_1, \dots, x_n , afin de pouvoir construire ensuite des témoins, dans un modèle donné de T , de la satisfaisabilité de l'énoncé.

Pour cela, on aura besoin d'un nouveau symbole de fonction f_Φ n'existant pas dans \mathcal{L} . Pour $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, si on a $\exists y \Phi(\bar{x}, y)$, on voudrait avoir aussi $\Phi(\bar{x}, f_\Phi(\bar{x}))$; ce qu'on peut résumer en la condition : $\forall \bar{x} ((\exists y \Phi(\bar{x}, y)) \rightarrow \Phi(\bar{x}, f_\Phi(\bar{x})))$.

2) On va ensuite étendre T en une théorie T^+ , pas à pas, en rajoutant à chaque étape, pour chaque formule $\Phi(\bar{x}, y)$ du langage de la théorie précédemment construite l'énoncé : $\theta_\Phi := \forall \bar{x} ((\exists y \Phi(\bar{x}, y)) \rightarrow \Phi(\bar{x}, f_\Phi(\bar{x})))$.

3) La dernière étape consiste à étendre un modèle \mathcal{M} de T en un modèle \mathcal{M}^+ de T^+ , en contruisant des interprétations pour les symboles de fonctions qui ont été rajoutés à \mathcal{L} . Formellement, tout cela donne :

Preuve :

1) On pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$, et $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{f_\Phi : \Phi \text{ est une } \mathcal{L}_i\text{-formule}\}$
(on ajoute un nouveau symbole de fonction par formule)

Remarque : Si \mathcal{L}_i est dénombrable, l'ensemble des \mathcal{L}_i -formules est dénombrable, et donc \mathcal{L}_{i+1} aussi.

2) Pour $\Phi(\bar{x}, y)$ une \mathcal{L}_i -formule, on pose : $\theta_\Phi := \forall \bar{x} ((\exists y \Phi(\bar{x}, y)) \rightarrow \Phi(\bar{x}, f_\Phi(\bar{x})))$;
 $T_0 = T$; $T_{i+1} = T_i \cup \{\theta_\Phi : \Phi \text{ est une } \mathcal{L}_i\text{-formule}\}$.

3) Soit \mathcal{M} un modèle de T et posons $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$. Nous allons supposer que nous avons pu interpréter dans \mathcal{M} les nouveaux symboles de fonctions de \mathcal{L}_i , appelons cette \mathcal{L}_i -structure \mathcal{M}_i (qui est de même domaine que \mathcal{M}), de telle façon que $\mathcal{M}_i \models T_i$. Nous allons montrer

que l'on peut interpréter les symboles de fonction de $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$ dans \mathcal{M}_i de telle façon que cette \mathcal{L}_{i+1} -structure \mathcal{M}_{i+1} sera un modèle de T_{i+1} .

Comme on l'a noté le domaine restera le même au cours de la construction par induction ($M_{i+1} = M_i = M_0 = M$). Soit $c \in M$ (le choix n'est pas important). Pour chaque formule Φ associée à un symbole de fonction f_Φ d'arité n de $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$, on construit une fonction

$$g : M^n \rightarrow M$$

$$\bar{a} \mapsto g(\bar{a}) = \begin{cases} b_0 \in \{b \in M : M_i \models \Phi(\bar{a}, b)\} = X_{\bar{a}} & \text{si } X_{\bar{a}} \neq \emptyset \\ c & \text{si } X_{\bar{a}} = \emptyset \end{cases}$$

Donc, pour tout $\bar{a} \in M^n$, on a : si $\mathcal{M}_{i+1} \models \exists y \Phi(\bar{a}, y)$, alors $\mathcal{M}_{i+1} \models \Phi(\bar{a}, g(\bar{a}))$; en posant $f_\Phi^{\mathcal{M}} = g$, on a donc $\mathcal{M}_{i+1} \models \theta_\Phi$, et donc $\mathcal{M}_{i+1} \models T_{i+1}$.

Pour terminer, on pose $\mathcal{L}^+ = \bigcup \mathcal{L}_i$; $T^+ = \bigcup T_i$. Si $\Phi(\bar{x}, y)$ est une \mathcal{L}^+ -formule, $\Phi \in \mathcal{L}_i$ pour un certain i et $\theta_\Phi \in T_{i+1} \subseteq T^+$; donc T^+ a des fonctions de Skolem intrinsèques.

En réitérant un raisonnement précédent, on voit que dans tout modèle \mathcal{M} satisfaisant T on peut interpréter les symboles de $\mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$ afin d'avoir \mathcal{M} satisfaisant T^+ . \square

Définition 5.1.2 T a des fonctions de Skolem *définissables* si pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, il existe une \mathcal{L} -formule $\psi(\bar{x}, y)$ tel que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y (\psi(\bar{x}, y) \rightarrow \phi(\bar{x}, y)), \text{ et}$$

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \rightarrow \exists_{=1} y \psi(\bar{x}, y)).$$

On peut définir alors une fonction F de la façon suivante :

$$\forall \bar{x} \forall y (F(\bar{x}) = y \leftrightarrow (\exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge \psi(\bar{x}, y)) \vee (\neg \exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge y = x_1)).$$

5.2 Exercices.

1. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur \mathbb{N} . Montrer que la structure $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est une sous-structure élémentaire de $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} / \mathcal{U}$.
2. Trouver un sous-ensemble de $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} / \mathcal{U}$ inclus dans l'intervalle $[-1, 1]$ qui n'a pas de borne supérieure. Montrez que cet ensemble n'est jamais définissable à paramètres dans \mathbb{R} .
3. Soit s la fonction successeur dans \mathbb{N} et dans \mathbb{Z} . Montrez que (\mathbb{N}, s) est une sous-structure de (\mathbb{Z}, s) , mais pas une sous-structure élémentaire.
4. Donnez un exemple de deux \mathcal{L} -structures $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ telles que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ mais \mathcal{A} n'est pas une sous-structure élémentaire de \mathcal{B} .
5. Soit K un corps commutatif et soit $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Montrer que tout sous-ensemble de K définissable par une formule sans quantificateurs dans $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ est soit fini soit cofini.
6. Soient $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ le langage des anneaux et $\mathcal{L}_< := \mathcal{L} \cup \{<\}$ celui des anneaux totalement-ordonnés. Soit T la $\mathcal{L}_<$ -théorie des corps réels-clos. Ecrivez une axiomatisation de T . Montrez que T n'a pas l'élimination des quantificateurs dans le langage \mathcal{L} . Montrez que T a des fonctions de Skolem définissables.

7. Montrez que l'anneau des entiers $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ a des fonctions de Skolem définissables.
(Aide : tout entier positif est somme de 4 carrés.)
8. Soit (\mathbb{N}^*, \leq) l'ensemble des nombres naturels non nuls muni de la relation d'ordre partiel suivante : $n \leq m$ si n divise m , pour $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les sous-ensembles suivants sont définissables sans paramètres : $\{1\}$, l'ensemble des nombres premiers, les nombres naturels qui ne sont pas divisibles par le carré d'un nombre premier.
9. Pour tout langage \mathcal{L} , montrez que deux structures sont élémentairement équivalentes ssi elles le sont pour tout sous-langage fini.
Montrez que si \mathcal{L} est dénombrable, si T est une \mathcal{L} -théorie sans modèles finis et si deux modèles dénombrables sont élémentairement équivalents, alors T est complète.
10. Soit $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ un anneau unitaire (pas nécessairement commutatif). Soit $\mathcal{L}_R := \{+, -, 0, \cdot, r; r \in R\}$ le langage des R -modules. Un R -module à droite \mathcal{M} est un modèle du schéma d'axiomes suivants :
 $(M, +, 0)$ est un groupe abélien,
 $\forall m \ m \cdot (r \cdot s) = (m \cdot r) \cdot s$,
 $\forall m \ m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$,
 $\forall m \ m \cdot 1 = m$,
 $\forall m_1 \forall m_2 \ (m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$.
 Soit (K, σ) un corps commutatif avec un automorphisme σ . Soit $R := K[t; \sigma]$ l'anneau des polynômes gauches c.a.d. c'est l'ensemble des sommes formelles de la forme $\sum_{i=1}^n t^i \cdot a_i$, où $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, la somme est définie par $\sum_{i=1}^n t^i \cdot a_i + \sum_{i=1}^n t^i \cdot b_i := \sum_{i=1}^n t^i \cdot (a_i + b_i)$ et la multiplication est définie par la règle $a \cdot t = t \cdot \sigma(a)$ pour $a \in K$, de la façon suivante :
 $\sum_{i=1}^n t^i \cdot a_i \cdot \sum_{j=1}^m t^j \cdot b_j := \sum_{k=1}^{n+m} t^k \cdot (\sum_{i+j=k} \sigma^j(a_i) \cdot b_j)$. Montrez que K est un $K[t; \sigma]$ module à gauche (on définit l'action de t sur K par $k \cdot t = \sigma(k)$).
11. On garde les notations de l'exercice précédent.
 Une formule *positive primitive* (p.p.) est une formule existentielle positive de la forme $\phi(y_1, \dots, y_n) := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{k \in N} \sum_{i=1}^m x_i \cdot r_{ik} = \sum_{j=1}^n y_j \cdot s_{jk}$ où N est un sous-ensemble fini de nombres naturels, $r_{ik}, s_{jk} \in R$.
 Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in M_1^{n-1}$, montrez que $\{y \in M_1 : \mathcal{M}_1 \models \phi(a_1, \dots, a_{n-1}, y)\}$ est la classe latérale d'un sous-groupe de M_1 .
 Soient $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ deux R -modules à droite, on dit \mathcal{M}_1 est *pur* dans \mathcal{M}_2 si toute formule p.p. à paramètres dans \mathcal{M}_1 satisfaite dans \mathcal{M}_2 est satisfaite dans \mathcal{M}_1 . Montrez que \mathcal{M}_1 est pur dans \mathcal{M}_2 ssi pour toute formule p.p. $\phi(x)$ à **une variable libre** on a pour tout $a \in M_1 : \mathcal{M}_1 \models \phi(a)$ ssi $\mathcal{M}_2 \models \phi(a)$.

5.3 Sous-structures élémentaires et test de Tarski-Vaught.

Théorème 5.3.1 Soient \mathcal{M}, \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures telles que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Alors \mathcal{M} est une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} ssi pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$, pour tout $a_1, \dots, a_n \in M$, si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)$ alors il existe $b \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$.

Preuve : : (\Rightarrow) : Exercice.

(\Leftarrow) Par induction sur la complexité des formules. \square

Exercice : Montrer que si l'on remplace dans l'énoncé de ce théorème, \mathcal{M} par un sous-ensemble X et si l'on suppose que pour tout $a_1, \dots, a_n \in X$, si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)$ alors il existe $b \in X$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$, alors la sous-structure de \mathcal{N} engendrée par X est égale à X et X est une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} . \square

Exercice : Trouver un exemple de deux structures (infinies) telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, et $Def_n(\mathcal{A}) = Def_n(\mathcal{B}) \cap A^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais telles que \mathcal{A} n'est pas sous-structure élémentaire de \mathcal{B} .

5.4 Chaînes de \mathcal{L} -structures.

Soit $(I, <)$ un ensemble totalement ordonné et soit $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ une chaîne de \mathcal{L} -structures, c.a.d. pour tout $i < j$, $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_j$. On définit la \mathcal{L} -structure $\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ de la façon suivante :

son domaine est $\bigcup_{i \in I} M_i$,

soit F un symbole de fonction de \mathcal{L} , et soit $a \in \bigcup_{i \in I} M_i$, alors $F(a) = F^{\mathcal{M}_i}(a)$, où $i \in I$ a été choisi tel que $a \in M_i$ (comme $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_j$, $F^{\mathcal{M}_j}(a) = F^{\mathcal{M}_i}(a)$).

$c^{\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i} = c^{\mathcal{M}_i}$

$R^{\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i} = \bigcup_{i \in I} R^{\mathcal{M}_i}$.

C'est une *chaîne élémentaire* de \mathcal{L} -structures si, de plus, pour tout $i < j$, $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$.

Lemme 5.4.1 *Soit $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ une chaîne élémentaire de \mathcal{L} -structures. Alors pour tout $j \in I$, $\mathcal{M}_j \prec \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$. \square*

Proposition 5.4.2 *Si T est une théorie modèle-complète, alors T est fermée par unions de chaînes.*

Preuve : On applique la définition (voir Définition 4.2.4) et le théorème sur les chaînes élémentaires. \square

Exercice : Trouver des exemples de chaînes (respectivement chaînes élémentaires) de structures.

5.5 Construction de sous-structures et extensions élémentaires

Théorème 5.5.1 (Löwenheim Skolem descendant). *Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure infinie et E un sous-ensemble de A . Alors il existe une sous-structure élémentaire \mathcal{B} de \mathcal{A} , contenant E et de cardinalité inférieure ou égale à $|E| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.*

Preuve : Notons $\kappa := |E| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$. Posons $E_0 := E$. Par induction sur $n \in \mathbb{N}$, on construit $E_n \subset A$. Soit $\mathcal{L}_{E_n} := \mathcal{L} \cup \{c_u : u \in E_n\}$. Soit \mathcal{F}_{E_n} l'ensemble des \mathcal{L}_{E_n} -énoncés de la forme $\exists x \psi(x)$ où $\psi(x)$ est une \mathcal{L}_{E_n} -formule. On énumère ces énoncés σ_μ , où $\mu < \kappa$ c.a.d. $\mathcal{F}_{E_n} := \{\sigma_\mu : \mu < \kappa\}$.

Supposons que nous avons construit E_n et construisons E_{n+1} . Pour chaque $\sigma_\mu \in \mathcal{F}_{E_n}$, on vérifie si $\mathcal{A} \models \sigma_\mu$, si c'est le cas, on choisit dans A un élément que l'on note a_{σ_μ} et on pose $E_{n,\sigma_\mu} := E_n \cup \{a_{\sigma_\mu}\}$. Sinon, c.a.d. si $\mathcal{A} \not\models \sigma_\mu$, on pose $E_{n,\sigma_\mu} := E_n$.

On définit $E_{n+1} := \bigcup_{\sigma_\mu \in \mathcal{F}_{E_n}} E_{n,\sigma_\mu}$.

Posons $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et montrons que B est le domaine d'une sous-structure élémentaire de \mathcal{A} .

- Le domaine de B est bien le domaine d'une sous-structure de \mathcal{A} . Montrons que si c est une constante de \mathcal{L} , alors $c^{\mathcal{A}} \in E_1$. Il suffit de considérer l'énoncé : $\exists x x = c$ ($c \in \mathcal{L}_{E_0}$). Montrons que B est fermé par les fonctions de \mathcal{L} . Soient $F(x_1, \dots, x_m)$ une fonction m -aire de \mathcal{L} et $\bar{b} := (b_1, \dots, b_m) \subset B$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{b} \subset E_n$. Soit $\bar{c}_{\bar{b}} := (c_{b_1}, \dots, c_{b_m}) \subset \mathcal{L}_{E_n}$ et considérons l'énoncé $\exists x x = F(\bar{c}_{\bar{b}})$.

- On applique le test de Tarski-Vaught pour montrer que B est bien le domaine d'une sous-structure élémentaire. Soit $\phi(x, \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule et $\bar{b} \subset B$. Comme précédemment il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{b} \subset E_n$. Supposons que $\mathcal{A} \models \exists x \phi(x, \bar{b})$. Soit $\bar{c}_{\bar{b}} := (c_{b_1}, \dots, c_{b_m}) \subset \mathcal{L}_{E_n}$ et considérons l'énoncé $\exists x \phi(x, \bar{c}_{\bar{b}})$. Il appartient à \mathcal{F}_{E_n} et donc il existe $\mu \in On$ tel qu'il est égal à σ_μ . Par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que $\mathcal{A} \models \phi(a, \bar{b})$. Par construction de E_{n+1} , on a mis dans E_{n+1} , un élément a_{σ_μ} tel que $\mathcal{A} \models \phi(a_{\sigma_\mu}, \bar{b})$.

- La cardinalité de \mathcal{B} est inférieure ou égale à celle de $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_{E_n}$ qui est inférieure ou égale à κ . \square

Théorème 5.5.2 (Löwenheim Skolem montant). *Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure infinie et κ un cardinal infini avec $\kappa \geq |A| + |\mathcal{L}|$. Alors, il existe une sur-structure élémentaire \mathcal{B} de \mathcal{A} , de cardinalité κ .*

Preuve : On construit tout d'abord en appliquant le théorème de compacité une sur-structure \mathcal{C} élémentaire de cardinalité supérieure ou égale à κ . Ensuite on applique le théorème précédent pour obtenir une sur-structure de \mathcal{A} qui soit une sous-structure élémentaire de \mathcal{C} de cardinalité κ .

Soit $\mathcal{L}_{A,\kappa} := \mathcal{L}_A \cup \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Soit $T_\kappa := \text{Diag}_{el}(\mathcal{A}) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha < \beta < \kappa\}$. La théorie T_κ est consistente car elle est finiment consistente (un modèle étant \mathcal{A}). Soit \mathcal{C} un modèle de T_κ . On applique alors le théorème précédent en prenant pour structure, la structure \mathcal{C} et comme sous-ensemble $\{c_a^{\mathcal{C}} : a \in A\}$. On obtient ainsi une $\mathcal{L}_{A,\kappa}$ -sous-structure élémentaire \mathcal{B} de \mathcal{C} , de cardinalité κ , contenant A et comme $\mathcal{B} \models \text{Diag}_{el}(A)$, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. (La structure \mathcal{B} est de cardinalité $\geq \kappa$ car c'est un modèle de T_κ et elle est de cardinalité $\leq \kappa$ par le théorème précédent. \square)

Corollaire 5.5.3 *Soit κ un cardinal dénombrable, \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure infinie et κ un cardinal infini. Alors il existe une \mathcal{L} -structure \mathcal{B} élémentairement équivalente à \mathcal{A} et de cardinalité κ .*

Preuve : Si \mathcal{A} est de cardinalité $< \kappa$. On applique le Théorème 5.5.2 et donc il existe une extension élémentaire \mathcal{B} de \mathcal{A} de cardinalité κ . Si \mathcal{A} est de cardinalité $\geq \kappa$. On applique le Théorème 5.5.1 en prenant un sous-ensemble E de A de cardinalité κ et on trouve une sous-structure élémentaire \mathcal{B} de \mathcal{A} de cardinalité κ . \square

Remarque : Etant donné une \mathcal{L} -théorie consistente T qui a des modèles infinis, où \mathcal{L} est dénombrable, ces théorèmes nous montrent que pour chaque cardinal infini κ , on a un

modèle de T de cardinalité κ . C'est pour cela que l'on parle de la *classe* des modèles de T (et non de l'ensemble des modèles de T).

Définition 5.5.1 Soit κ un cardinal infini. Une théorie T est κ -catégorique si elle est consistante et si tous ses modèles de cardinalité κ sont isomorphes.

Exemples :

- La théorie des espaces vectoriels sur un corps fini \mathbb{F}_p est \aleph_0 -catégorique.
- La théorie des espaces vectoriels sur \mathbb{Q} est \aleph_1 -catégorique, mais pas \aleph_0 -catégorique.

Théorème 5.5.4 Soit \mathcal{L} un langage dénombrable. Toute \mathcal{L} -théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ -catégorique pour un certain cardinal κ infini, est complète.

Preuve : Montrons que tous les modèles de T sont élémentairement équivalents. Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux modèles de T . Comme ils sont nécessairement infinis, on peut appliquer le Corollaire 5.5.3. Il existe donc $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}$, de cardinalité κ et $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}$ de cardinalité κ . Par hypothèse, $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$ et donc $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. \square

Autre preuve Supposons que T ne soit pas complète. Il y a donc un \mathcal{L} -énoncé ϕ tel que $T \not\models \phi$ et $T \not\models \neg\phi$. Puisque $T \not\models \phi$ (resp. $T \not\models \neg\phi$), il existe des modèles $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ de T tel que $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$ et $\mathcal{M}_1 \not\models \neg\phi$. Comme T n'a pas de modèle fini, \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 sont tous les deux infinis. Par le Corollaire 5.5.3, on peut trouver \mathcal{N}_0 et \mathcal{N}_1 de cardinalité κ et tels que $\mathcal{N}_i \equiv \mathcal{M}_i$, pour $i = 0, 1$. Et donc ces deux modèles de T : $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$ ne sont pas isomorphes, ce qui contredit la κ -catégoricité de T . \square

Remarque : Il faut faire attention à l'hypothèse : T n'a que des modèles infinis. Soit $\mathcal{L} := \{., 1\}$, alors la \mathcal{L} -théorie des groupes d'exposant 2 c.a.d. les groupes satisfaisant à l'énoncé : $\forall x x^2 = 1$ n'est pas complète, bien que tous les modèles de cardinalité \aleph_0 soient isomorphes.

Soit $\mathcal{L} := \{<\}$ et $T_{<,dense}$ la \mathcal{L} -théorie des ordres denses (voir chapitre 2). Soit T_C la \mathcal{L} -théorie $T_{<,dense} \cup \{\forall x \exists y \exists z y < x < z\}$.

Théorème 5.5.5 (Cantor) La \mathcal{L} -théorie T_C des ordres denses sans premier ni dernier élément est \aleph_0 -catégorique.

Preuve : Soient $(\mathcal{A}, <)$ et $(\mathcal{B}, <)$ deux modèles dénombrables de T . Notons que ces modèles sont infinis (sinon ils auraient un maximum ou l'ordre ne serait pas dense). Soient $(a_n)_{n \in \omega}$ (respectivement $(b_n)_{n \in \omega}$) une énumération de A (respectivement de B). On construit une suite de bijections $f_i : A_i \rightarrow B_i$, où $A_i \subseteq A$ et $B_i \subseteq B$ sont finis. On veut que la suite (f_i) vérifie : $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$, et que si $x, y \in A_i$, alors $(x < y \text{ ssi } f_i(x) < f_i(y))$. On appelle f_i un *plongement partiel*. La construction sera effectuée de telle sorte que $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ et $B = \bigcup_{i \in \omega} B_i$: dans ce cas, on aura $f := \bigcup_{i \in \omega} f_i$ isomorphisme de $(A, <)$ dans $(B, <)$.

Aux étapes impaires de la construction, on va étendre le domaine A_i (et donc aussi f_i et B_i) de façon à avoir $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$. Aux étapes paires, c'est l'image B_i qui va être étendue de façon à obtenir ensuite $B = \bigcup_{i \in \omega} B_i$.

Le fait de construire un isomorphisme ainsi en alternant deux types d'étapes (l'une construisant le domaine, l'autre l'image) donne son nom à la méthode de construction *de va-et-vient*.

étape 0 : On pose $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$.

étape $n + 1 = 2m + 1$: On veut s'assurer que $a_m \in A_{n+1}$. Si $a_m \in A_n$, on pose $A_{n+1} := A_n$; $B_{n+1} := B_n$; $f_{n+1} := f_n$. Si $a_m \notin A_n$, on doit trouver $b \in B \setminus B_n$ tel que pour tout élément $a \in A_n$, $a < a_m$ ssi $f_n(a) < b$. Il y a trois possibilités :

- i) a_m est plus grand que tous les éléments de A_n
- ii) a_m est plus petit que tous les éléments de A_n
- iii) il y a $\alpha, \beta \in A_n$ tels que $\alpha < \beta$ et $\alpha < a_m < \beta$ et tels que chaque élément de A_n est soit plus grand que β soit plus petit que α (cela est possible puisque A_n est fini).

Dans le cas i) (resp. ii)), comme B_n est fini et que \mathcal{B} est un modèle de T , on peut trouver $b \in B$ plus grand (resp. petit) que tous les éléments de B_n . Dans le cas iii), par hypothèse d'induction f_n vérifie $f_n(\alpha) < f_n(\beta)$. Il existe donc $b \in B \setminus B_n$ tel que $f_n(\alpha) < b < f_n(\beta)$ (l'ordre est dense). Notons que l'on a alors : pour tout élément $a \in A_n$, $a < a_m$ ssi $f_n(a) < b$. Dans les trois cas, on peut donc poser : $A_{n+1} := A_n \cup \{a_m\}$, $B_{n+1} := B_n \cup \{b\}$, et

$$\begin{array}{lcl} f_{n+1} : A_{n+1} & \rightarrow & B_{n+1} \\ \alpha & \mapsto & f_n(\alpha) \text{ si } \alpha \in A_n \\ a_m & \mapsto & b \end{array}$$

étape $n + 1 = 2m + 2$: On veut cette fois s'assurer que $b_m \in B_{n+1}$. La preuve est similaire à celle de l'étape impaire.

On a construit une bijection $f : A \rightarrow B$ qui respecte l'ordre, c'est donc bien un \mathcal{L} -isomorphisme. \square

Corollaire 5.5.6 *La théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est complète.*

Preuve : On montre tout d'abord que tout ordre sans premier ni dernier élément est infini. Ensuite on applique les théorèmes 5.5.4 et 5.5.5. \square

5.6 Exercices.

1. Montrez que la classe des groupes abéliens où tout élément est d'ordre 2 est \aleph_0 -catégorique.
2. Est-ce que la classe des groupes abéliens infinis où tout élément est d'ordre 4 est complète?
3. Montrez qu'une théorie T qui a un modèle fini et qui est complète, a un seul modèle.
4. Soit T la théorie des ordres denses dans le langage $\{<\}$. Montrez que tout modèle de T est infini. Est-ce que T est complète?
5. Soit $\mathcal{L}_0 := \{s\}$, où s est un symbole de fonction unaire. Soit T l'ensemble des \mathcal{L}_0 énoncés qui expriment que s est une bijection sans cycles c.a.d. pour chaque $n \in \omega$, on a $\forall x s^n(x) \neq x$.
Montrer que T est \aleph_1 -catégorique mais pas \aleph_0 -catégorique.

Chapitre 6

Dualité de Stone.

Rappelons la définition de théorie complète.

Définition 6.0.1 Une théorie est *complète* si elle est consistante et maximale pour cette propriété (*dans le sens \models et non ensembliste*) c.a.d. pour tout \mathcal{L} -énoncé σ , $T \models \sigma$ ou $T \models \neg\sigma$.

Deux \mathcal{L} -théories T_1 et T_2 sont dites *équivalentes* si elles ont les mêmes modèles.

Une façon concrète d'obtenir des théories complètes est la suivante.

Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure, la *théorie de \mathcal{A}* est l'ensemble, noté $Th(\mathcal{A})$, de tous les énoncés vrais dans \mathcal{A} . Cette théorie consistante est aussi complète (en effet dans \mathcal{A} tout \mathcal{L} énoncé σ est soit satisfait, soit sa négation $\neg\sigma$ est satisfaite).

Exercice : Montrer que si T est une théorie complète, alors T est équivalente à une théorie de la forme $Th(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} est un modèle de T (voir 2.4 Exercice (1)).

Notation 6.0.1 Soit \mathcal{K} une classe de \mathcal{L} -structures, la théorie de \mathcal{K} est l'ensemble noté $Th(\mathcal{K})$ de tous les \mathcal{L} -énoncés σ vrais dans les éléments de \mathcal{K} c.a.d. tels que pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \models \sigma$.

Soit T est une théorie, on notera \bar{T} l'ensemble des conséquences de T c.a.d. l'ensemble des énoncés σ tels que $T \models \sigma$. Ces deux théories T et \bar{T} sont équivalentes. On a aussi que $\bar{T} = Th(Mod(T))$.

6.1 Classes élémentaires.

Définition 6.1.1 On dira qu'une classe \mathcal{K} de \mathcal{L} -structures est *élémentaire* s'il existe un ensemble de \mathcal{L} -énoncés Σ tel que \mathcal{K} soit la classe de tous les modèles de Σ , ce que l'on notera par $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$.

Exercice : Pour toute classe \mathcal{K} de \mathcal{L} -structures, on a que $\mathcal{K} \subseteq Mod(Th(\mathcal{K}))$. Montrez que \mathcal{K} est une classe élémentaire ssi $\mathcal{K} = Mod(Th(\mathcal{K}))$.

Proposition 6.1.1 Soit \mathcal{K} une classe de \mathcal{L} -structures. \mathcal{K} est élémentaire ssi \mathcal{K} est fermée par ultraproducts et équivalence élémentaire.

Preuve : (\rightarrow) Supposons $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ où Σ est un ensemble de \mathcal{L} -énoncés. Soient $\mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$, $i \in I$, soit \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur I . Montrons que $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{U}$ appartient à \mathcal{K} . De façon équivalente, $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{U} \models \Sigma$, ce qui découle du théorème de Łos car chaque $\mathcal{A}_i \models \Sigma$.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ et soit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, alors $\mathcal{B} \models \Sigma$ et donc $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(\leftarrow) Soit $\Sigma := \text{Th}(\mathcal{K})$, il faut montrer $\text{Mod}(\Sigma) = \mathcal{K}$. Par définition, on a que $\mathcal{K} \subset \text{Mod}(\Sigma)$. Soit $\mathcal{B} \in \text{Mod}(\Sigma)$, si on montre que \mathcal{B} est élémentairement équivalente à un ultraproduct d'éléments de \mathcal{K} , alors on a terminé. Pour chaque $\tau \in \text{Th}(\mathcal{B})$, il existe $\mathcal{M}_\tau \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{M}_\tau \models \tau$ (sinon $\neg\tau \in \Sigma$). Soit $J_\sigma := \{\tau \in \text{Th}(\mathcal{B}) : \mathcal{M}_\tau \models \sigma\}$. Notons que $J_\sigma \neq \emptyset$. De plus, $\{J_\sigma : \sigma \in \text{Th}(\mathcal{B})\}$ a la Propriété de l'Intersection Finie. En effet, $J_{\sigma_1} \cap J_{\sigma_2} \cap \dots \cap J_{\sigma_n} = J_{\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n}$. Donc il existe un ultrafiltre qui contient cet ensemble de parties de $\text{Th}(\mathcal{B})$. Posons $I = \text{Th}(\mathcal{B})$.

Claim : $\prod_I \mathcal{M}_\tau / \mathcal{U} \models \text{Th}(\mathcal{B})$ et donc $\mathcal{B} \equiv \prod_I \mathcal{M}_\tau / \mathcal{U}$.

Preuve : Soit $\sigma \in \text{Th}(\mathcal{B})$, par le théorème de Łos, $\prod_I \mathcal{M}_\tau / \mathcal{U} \models \sigma$ est équivalent à $\{\tau \in I : \mathcal{M}_\tau \models \sigma\} \in \mathcal{U}$. Ce dernier ensemble est exactement J_σ qui est dans \mathcal{U} par construction.

Par hypothèse sur \mathcal{K} , $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$: ce qu'il fallait montrer. \square

Cette proposition nous permet à partir d'une classe \mathcal{K} de construire la plus petite classe élémentaire qui contient \mathcal{K} . Il suffit de fermer \mathcal{K} par ultraproducts et équivalence élémentaire. En utilisant le fait qu'un ultraproduct d'ultraproduits d'éléments de \mathcal{K} est encore un ultraproduct d'éléments de \mathcal{K} et la proposition 6.1.1, on peut montrer que la plus petite classe élémentaire qui contient \mathcal{K} est égale à la classe des structures qui sont élémentairement équivalentes à un ultraproduct d'éléments de \mathcal{K} .

Par le théorème de Frayne suivant et (\star), cette classe est égale à la classe des structures qui se plonge élémentairement dans un ultraproduct d'éléments de \mathcal{K} .

Théorème 6.1.2 Soient \mathcal{A} , \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures et supposons que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Alors il existe un ensemble I et un ultrafiltre \mathcal{U} sur I tel que \mathcal{A} se plonge élémentairement dans $\prod_I \mathcal{B} / \mathcal{U}$.

Preuve : En utilisant l'axiome du choix, on énumère le domaine de \mathcal{A} : $(a_\alpha)_{\alpha < \lambda}$, où $\alpha, \lambda \in \text{On}$. On pose $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$ et on considère \mathcal{A} comme une \mathcal{L}_A -structure en interprétant c_α par a_α . On note \mathcal{A}^* cette nouvelle structure.

Soit \mathcal{F} l'ensemble de toutes les \mathcal{L} -formules. A une \mathcal{L} -formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$, on associe un ensemble de \mathcal{L}_A -énoncés : $\phi(c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_n})$, lorsque $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \lambda$. Soit \mathcal{F}_A l'ensemble de tous les \mathcal{L}_A -énoncés.

Posons $I := \{\sigma \in \mathcal{F}_A : \mathcal{A}^* \models \sigma\}$. Pour $\sigma \in I$ de la forme $\phi(c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_n})$, où $\phi(x_1, \dots, x_n)$ une \mathcal{L} -formule, on a que $\mathcal{A}^* \models \sigma$ ssi $\mathcal{A} \models \phi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n})$.

Supposons que $\mathcal{A}^* \models \sigma$, donc $\mathcal{A} \models \exists x_1 \dots \exists x_n \phi(x_1, \dots, x_n)$. Comme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, on a que $\mathcal{B} \models \exists x_1 \dots \exists x_n \phi(x_1, \dots, x_n)$. Posons $b_\sigma := (b_{\sigma, \alpha_1}, \dots, b_{\sigma, \alpha_n})$ un n -uplet d'éléments de B tel que $\mathcal{B} \models \phi(b_\sigma)$.

A chaque $\chi \in I$, on associe ainsi un uplet d'éléments b_χ et on emploiera la notation $\mathcal{B} \models \phi(b_\chi)$ en sous-entendant que b_χ a la bonne longueur.

Pour tout $\sigma \in I$, on pose $J_\sigma := \{\chi \in I : \mathcal{B} \models \phi(b_\chi)\}$.

Affirmation : L'ensemble $\{J_\chi : \chi \in I\}$ a la propriété de l'intersection finie.

Preuve : Montrons que $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \in J_{\sigma_1} \cap \dots \cap J_{\sigma_n}$. Par définition, $J_{\sigma_1} \cap \dots \cap J_{\sigma_n} := \{\chi \in I : \mathcal{B} \models \phi_1(b_\chi) \wedge \phi_2(b_\chi) \wedge \dots \wedge \phi_n(b_\chi)\} = \{\chi \in I : \mathcal{B} \models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)(b_\chi)\}$. Mais par définition, $\mathcal{B} \models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)(b_{\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n})$, i.e. $\bigwedge_{i=1}^n \phi_i \in I$.

Soit \mathcal{U} un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties.

On envoie a_α sur la classe, modulo \mathcal{U} , de la suite $(b_{\sigma,\alpha})_{\sigma \in I}$. Montrons que cette application de \mathcal{A} dans $\prod_I \mathcal{B}/\mathcal{U}$ est élémentaire.

Soit $\phi(x_1, \dots, x_n)$ une \mathcal{L} -formule et supposons que $\mathcal{A} \models \phi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n})$, donc en posant $\sigma := \phi(c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_n})$, on a que $J_\sigma \in \mathcal{U}$, i.e. $\{\chi \in I : \mathcal{B} \models \phi(b_{\chi,\alpha_1}, \dots, b_{\chi,\alpha_n})\} \in \mathcal{U}$, ainsi $\prod_I \mathcal{B}/\mathcal{U} \models \phi([b_{\chi,\alpha_1}], \dots, [b_{\chi,\alpha_n}])$. \square

Définition 6.1.2 On dira que Σ_1 axiomatise Σ si la classe des modèles de Σ_1 est égale à celle de Σ , ou de façon équivalente si ces deux théories sont équivalentes. On dira que Σ est finiment axiomatisable s'il existe un ensemble fini Σ_1 qui axiomatise Σ .

On dira que Σ_1 axiomatise la classe \mathcal{K} si $\mathcal{K} = Mod(\Sigma_1)$ ou encore si \mathcal{K} est élémentaire et si Σ_1 est équivalente à $Th(\mathcal{K})$. La classe \mathcal{K} est finiment axiomatisable si \mathcal{K} est élémentaire et si $Th(\mathcal{K})$ est finiment axiomatisable.

Exemple : Soit \mathcal{K} la classe de tous les corps finis. La plus petite classe élémentaire qui contient \mathcal{K} est la classe des structures élémentairement équivalents à un ultraproduct de corps finis.

J. Ax a identifié la théorie de la classe de tous les corps finis dans le langage des anneaux $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ (voir Ax, James, *The elementary theory of finite fields. Ann. of Math. (2) 88, 1968, 239-271*). Un modèle infini de cette théorie est appelé un corps *pseudofini*. Et donc tout corps pseudofini est élémentairement équivalent à un ultraproduct non-principal de corps finis.

Définition 6.1.3 Un corps est parfait s'il vérifie les propriétés suivantes pour chaque $p \in \mathcal{P}$:

$$p = 0 \rightarrow \forall x \exists y (x = y^p).$$

Proposition 6.1.3 *Tout corps pseudo-fini est parfait.*

Preuve : Il suffit de montrer que tout ultraproduct de corps finis de caractéristique p satisfait à la propriété : $\forall x \exists y (x = y^p)$ ou encore que l'application Frobenius est surjective. Par le théorème de Łos, il suffit de vérifier cette propriété dans chaque corps fini de caractéristique p . Mais dans une structure finie, toute application injective est surjective. \square

J. Ax a montré qu'un corps K est pseudofini si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes (que l'on peut exprimer par un schéma d'axiomes) :

1. K est parfait,
2. pour chaque $n \in \omega^*$, K a une seule extension algébrique de degré n ,
3. toute variété absolument irréductible définie sur K a un point dans K .

Exercice : Soit K un corps pseudofini. Montrer que l'énoncé χ qui exprime que toute application polynomiale de degré $\leq d$ de K^n dans K^n , qui est injective est surjective est vrai dans K (voir chapitre 2.2).

6.2 Espaces de Stone.

Dans ce chapitre, nous allons, à un langage \mathcal{L} donné, considérer l'espace de toutes les \mathcal{L} -théories complètes, sur lequel nous allons mettre une topologie, pour laquelle cet espace sera Hausdorff et compact.

Définition 6.2.1 Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente. Par commodité, on supposera que \mathcal{L} contient au moins un symbole de constante.

Soit $S_0(T)$ l'ensemble des \mathcal{L} -théories complètes T' qui contiennent T et telles que $\bar{T}' = T'$. Un point de $S_0(T)$ est donc l'ensemble de toutes les conséquences d'une théorie complète qui contient T , ou encore est de la forme $Th(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} \models T$.

On munit $S_0(T)$ d'une topologie de la façon suivante.

On définit $[\tau] := \{p \in S_0(T) : \tau \in p\}$, où τ parcourt les \mathcal{L} -énoncés. Notons que, pour τ_1, τ_2 deux \mathcal{L} -énoncés, on a :

$$[\tau_1] \cap [\tau_2] := [\tau_1 \wedge \tau_2].$$

$$[\tau_1] \cup [\tau_2] := [\tau_1 \vee \tau_2].$$

$$[\neg\tau] = S_0(T) - [\tau] \text{ (noté } [\tau]^c).$$

$$S_0(T) = [c = c] \text{ et } \emptyset = [c \neq c].$$

On prend comme *base d'ouverts* : $\{[\tau] : \tau \text{ est un } \mathcal{L}\text{-énoncé}\}$. On notera l'espace topologique correspondant $\mathcal{S}_0(T)$. Notons que $[\tau] = [\neg\tau]^c$ (et donc c'est aussi un fermé).

Remarque : Une \mathcal{L} -théorie complète p est finiment axiomatisable s'il existe un \mathcal{L} -énoncé τ tel que $\{p\} = [\tau]$.

Rappelons qu'un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Il est *Hausdorff* (ou séparé) si pour toute une paire de points $\{p_1, p_2\}$ on peut trouver deux ouverts disjoints O_1, O_2 tels que $p_1 \in O_1$ et $p_2 \in O_2$.

Proposition 6.2.1 *L'espace $\mathcal{S}_0(T)$ est séparé et compact.*

Preuve : Montrons que $\mathcal{S}_0(T)$ est Hausdorff (de façon équivalente séparé). Soient $p_1 \neq p_2 \in \mathcal{S}_0(T)$. Il existe donc $\sigma \in p_1 - p_2$ (et donc $\neg\sigma \in p_2$). On a donc $p_1 \in [\sigma]$ et $p_2 \in [\neg\sigma]$ et $[\sigma] \cap [\neg\sigma] = \emptyset$.

Soit $S_0(T) = \bigcup_{i \in I} [\tau_i]$. Donc $\emptyset = \bigcap_{i \in I} [\neg\tau_i]$. Autrement dit, $T \cup \{\neg\tau_i : i \in I\}$ est inconsistente. Par le théorème de compacité, une partie finie E de cette théorie est inconsistente (et on peut supposer que toute partie propre de E est consistente). Comme T est consistente, cette partie finie E n'est pas incluse dans T . Soient $\neg\tau_{i_1}, \dots, \neg\tau_{i_n} \in E - T$. Donc toute théorie complète qui contient T et $\bigwedge_{1 \leq j \leq n-1} \neg\tau_{i_j}$ contient τ_{i_n} . Autrement dit $S_0(T) = \bigcup_{1 \leq j \leq n} [\tau_{i_j}]$ (et ce recouvrement est minimal). \square

Corollaire 6.2.2 *Tout ouvert-fermé (i.e. tout ouvert qui est aussi un fermé) de $\mathcal{S}_0(T)$ est de la forme $[\sigma]$, pour un certain \mathcal{L} -énoncé σ .*

Preuve : Un ouvert est de la forme $\bigcup_{i \in I} [\tau_i]$, s'il est fermé son complémentaire dans $\mathcal{S}_0(T)$ est de la même forme i.e. $\bigcup_{j \in J} [\sigma_j]$ et donc $S_0(T) = \bigcup_{i \in I} [\tau_i] \cup \bigcup_{j \in J} [\sigma_j]$. Par la Proposition 6.2.1, il existe un sous-recouvrement fini c.a.d. il existe $I_1 \subset I$ et $J_1 \subset J$ finis tels que

$S_0(T) = \bigcup_{i \in I_1} [\tau_i] \cup \bigcup_{j \in J_1} [\sigma_j]$. Comme $\bigcup_{i \in I_1} [\tau_i]$ est inclus à $\bigcup_{i \in I} [\tau_i]$, $\bigcup_{j \in J_1} [\sigma_j] \subset \bigcup_{j \in J} [\sigma_j]$ et que ces deux ensembles sont disjoints, l'ouvert-fermé de départ est égal à $\bigcup_{i \in I} [\tau_i] = [\bigvee_{i \in I_1} \tau_i]$. \square

Soit Σ une \mathcal{L} -théorie, on associe à Σ un fermé F_Σ de l'espace \mathcal{S}_0 : $F_\Sigma := \bigcap_{\sigma \in \Sigma} [\sigma]$.

Exercice : Montrez que si $F_\Sigma \neq \emptyset$ ssi Σ est consistente. Montrez que pour Σ_1 une \mathcal{L} -théorie, Σ et Σ_1 sont équivalentes ssi $F_\Sigma = F_{\Sigma_1}$ et que Σ est finiment axiomatisable ssi il existe un énoncé τ tel que $F_\Sigma = [\tau]$.

Proposition 6.2.3 *Une classe \mathcal{K} de \mathcal{L} -structures est finiment axiomatisable ssi \mathcal{K} et son complémentaire \mathcal{K}^c dans la classe de toutes les \mathcal{L} -structures sont élémentaires.*

Preuve : (\rightarrow) C'est immédiat car par définition il existe Σ_1 fini tel que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma_1)$ et donc en posant $\tau := \bigwedge_{\sigma \in \Sigma_1} \sigma$, $\mathcal{K} = \text{Mod}(\tau)$. Ainsi, on a $\mathcal{K}^c = \text{Mod}(\neg\tau)$.

(\leftarrow) Puisque \mathcal{K} est élémentaire, il existe une \mathcal{L} -théorie Σ (respectivement Σ') telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ (respectivement $\mathcal{K}^c = \text{Mod}(\Sigma')$). Soit F_Σ (respectivement $F_{\Sigma'}$) le fermé correspondant de $\mathcal{S}_0(T)$. Comme ces deux fermés sont disjoints et complémentaires (en effet supposons qu'il existe $p \in F_\Sigma \cap F_{\Sigma'}$, et soit $\mathcal{A} \models p$, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c$; s'il existe $p \in \mathcal{S}_0 - (F_\Sigma \cup F_{\Sigma'})$ et si $\mathcal{B} \models p$, alors $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$ and $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}^c$, une contradiction). Par le Corollaire 6.2.2, l'ouvert-fermé F_Σ est de la forme $[\tau]$, et donc \mathcal{K} est axiomatisable par τ .

On peut aussi faire une preuve directe de (\leftarrow).

Supposons qu'au contraire que pour tout $\sigma \in \text{Th}(\mathcal{K})$, il existe $\mathcal{M}_\sigma \in \mathcal{K}^c$ et $\mathcal{M}_\sigma \models \sigma$. Posons $J_\sigma = \{\tau \in \text{Th}(\mathcal{K}) : \mathcal{M}_\tau \models \sigma\} \neq \emptyset$. Cet ensemble de sous-ensembles de $\text{Th}(\mathcal{K})$ a la P.I.F. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties. On a $\prod_{\sigma \in \text{Th}(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\sigma / \mathcal{U} \models \text{Th}(\mathcal{K})$. En effet pour tout $\tau \in \text{Th}(\mathcal{K})$, $J_\tau \in \mathcal{U}$ et donc $\prod_{\text{Th}(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\sigma / \mathcal{U} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c$. (En effet, \mathcal{K} est élémentaire et donc $\mathcal{K} = \text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K}))$ et \mathcal{K}^c est fermée par ultraproducts.)

\square

Remarque : Si \mathcal{K}_σ est une classe de \mathcal{L} -structures axiomatisée par un \mathcal{L} -énoncé σ , et si \mathcal{K} est une classe élémentaire de \mathcal{L} -structures telle que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, alors : \mathcal{K} est finiment axiomatisable ssi $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est élémentaire.

La preuve est similaire à celle de la proposition 6.2.3, en voici une idée :

(\rightarrow) Soit τ un \mathcal{L} -énoncé axiomatisant \mathcal{K} . La classe $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est axiomatisée par $\sigma \ \& \ \neg\tau$.

(\leftarrow) (preuve topologique) $F := \bigcap_{\mathcal{K} \models \tau} [\tau]$ est un fermé. Soit $[\sigma]$ l'ouvert-fermé correspondant à \mathcal{K}_σ . Par hypothèse $F_1 := [\sigma] \setminus F$ est fermé ; $[\sigma] = F \sqcup F_1$; donc F est un ouvert-fermé (avec \sqcup dénotant l'union disjointe) et donc de la forme $[\tau]$, pour un certain \mathcal{L} -énoncé τ .

(\leftarrow) (preuve par ultraproducts) Comme $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, si $\tau \in \text{Th}(\mathcal{K})$, alors $\tau \ \& \ \sigma \in \text{Th}(\mathcal{K})$. Si \mathcal{K} n'était pas finiment axiomatisable, pour tout $\tau \in \text{Th}(\mathcal{K})$, il existerait $\mathcal{M}_\tau \notin \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{M}_\tau \models \tau \ \& \ \sigma$ (et donc $\mathcal{M}_\tau \in \mathcal{K}_\sigma$). Posons $J_\tau = \{\chi \in \text{Th}(\mathcal{K}) : \mathcal{M}_\chi \models \tau \ \& \ \sigma\} \supset \{\tau\}$. Cet ensemble de sous-ensembles non-vides de $\text{Th}(\mathcal{K})$ a la P.I.F. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties. On a $\prod_{\chi \in \text{Th}(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\chi / \mathcal{U} \models \text{Th}(\mathcal{K})$. Or comme $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est fermée par ultraproducts, cet ultraproduct appartient $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$. Mais par construction $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_\chi \models \text{Th}(\mathcal{K})$ et donc comme \mathcal{K} est élémentaire, $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_\chi \in \mathcal{K}$, une contradiction. \square

6.3 Espaces de types et saturation.

Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente. Nous avons défini l'espace topologique $\mathcal{S}_0(T)$ des \mathcal{L} -théories complètes T' qui contiennent T et telles que $\bar{T}' = T'$.

Lorsque T est une théorie complète, $\mathcal{S}_0(T)$ est un singleton. Et donc, nous allons associer à T une suite d'espaces topologiques que l'on obtient en enrichissant le langage \mathcal{L} par un ensemble de constantes qui n'apparaissent pas déjà dans \mathcal{L} .

Dans le chapitre suivant, nous donnerons une caractérisation des théories complètes T , pour lesquelles tous les espaces $\mathcal{S}_n(T)$ sont finis, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 6.3.1 L'ensemble $S_1(T)$, respectivement $S_n(T)$, est l'ensemble des $\mathcal{L} \cup \{c_1\}$ -théories complètes T_1 qui contiennent T et telles que $\bar{T}_1 = T_1$ (c.a.d. maximales comme ensembles d'énoncés), respectivement l'ensemble des $\mathcal{L}_{\bar{c}} := \mathcal{L} \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ -théories complètes T_n qui contiennent T et telles que $\bar{T}_n = T_n$ (où $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de nouveaux symboles de constantes (c.a.d. qui n'apparaissent pas déjà dans \mathcal{L})).

Dans $S_n(T)$, on prend comme base d'ouverts $[\phi(\bar{c})]$, où $\phi(\bar{x})$ parcourt les \mathcal{L} -formules à n variables libres.

Les espaces topologiques $\mathcal{S}_n(T)$ correspondants sont séparés et compacts (voir Proposition 6.2.1).

A un point de $S_n(T)$, on associe l'ensemble des \mathcal{L} -formules à n -variables libres obtenu en remplaçant c_1, \dots, c_n par x_1, \dots, x_n et cet ensemble de \mathcal{L} -formules est appelé *un n -type complet* (voir chapitre 4.1). On fera l'abus de langage et notation suivant. On dira que ce n -type complet appartient à $S_n(T)$.

Un ensemble de \mathcal{L} -formules à n variables libres est un n -type s'il peut être complété en un n -type complet.

Soit $\mathcal{M} \models T$, à $p \in S_n(T)$, on associe le sous-ensemble de M^n (infiniment définissable) suivant : $\bigcap_{\phi \in p} \phi(M)$.

Soit $\mathcal{M} \models T$ et soit $A \subset M$; notons $Th_A(\mathcal{M})$, la théorie de \mathcal{M} dans le langage $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$, où c_a est un symbole de constante qui n'appartient pas à \mathcal{L} .

On note $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$, l'espace $\mathcal{S}_n(Th_A(\mathcal{M}))$. Soit $\bar{m} \in M^n$, on note $tp_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, ou $p_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, l'ensemble des \mathcal{L}_A -formules $\phi(v_1, \dots, v_n)$ telles que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$.

Exercice : Pour tout n -type complet $p(\bar{x}) \in S_n(T)$, il existe $\mathcal{M} \models T$ et $\bar{a} \subseteq M^n$ tels que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ soit égal à $p(\bar{x})$.

Définition 6.3.2 Soit κ un cardinal infini et \mathcal{L} un langage dénombrable. Un modèle \mathcal{M} est κ -saturé si pour tout $A \subset M$ de cardinalité *strictement* plus petite que κ , tout élément p de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ est réalisé dans \mathcal{M} c.a.d. qu'il existe un uple $\bar{c} \subset M$ tel que pour toute \mathcal{L}_A -formule $\phi(x_1, \dots, x_n) \in p$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{c})$.

Théorème 6.3.1 Soit \mathcal{L} un langage dénombrable, \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur ω et \mathcal{A}_n , $n \in \omega$, des \mathcal{L} -structures. Alors $\mathcal{M} := \prod_{\omega} \mathcal{M}_n / \mathcal{U}$ est \aleph_1 -saturé.

Preuve : Soit A un sous-ensemble dénombrable de M et soit $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Comme \mathcal{L}_A est dénombrable, $p(\bar{x})$ contient un nombre dénombrable de formules. Posons $p(\bar{x}) := \{\phi_n(\bar{x}) : n \in \omega\}$, où $\phi_n(\bar{x})$ est une \mathcal{L}_A -formule.

Comme \mathcal{U} est non-principal, \mathcal{U} contient le filtre des parties cofinies. Soit $J_k := \{m \in \omega : m \geq k \text{ \& } \mathcal{M}_m \models \exists \bar{x}(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(\bar{x})\}$, par hypothèse $J_k \in \mathcal{U}$. Pour chaque m , il existe un plus grand k tel que $m \in J_k$. Notons un tel k , $k(m)$ et choisissons un uple $\bar{a}_m \subset \mathcal{M}_m$ tel que $\mathcal{M}_m \models (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{k(m)})(\bar{a}_m)$.

Pour tout k , on a que

$$\{m \in \omega : \mathcal{M}_m \models \phi_k(\bar{a}_m)\} \supset \{m \in \omega : k \leq k(m)\} \supset J_k.$$

Ainsi la classe, modulo \mathcal{U} , de la suite $(\bar{a}_m)_{m \in \omega}$ satisfait chaque ϕ_k dans \mathcal{M} . \square

Lemme 6.3.2 *Un espace topologique X compact et infini admet un point non isolé.*

Preuve : En effet, supposons que tout point de X est isolé, ie : $\forall x \in X, \{x\}$ est ouvert. Alors $\bigcup_{x \in X} \{x\}$ est un recouvrement de X , qui est compact. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $\bigcup_{x \in X'} \{x\}$. Or X est infini et X' est fini : contradiction. \square

6.4 Exercices.

1. Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente. Montrez que T est complète ssi tous ses modèles sont élémentairement équivalents.
2. Montrez que la classe de tous les groupes est une classe élémentaire.
3. Montrez que la classe \mathcal{C} des corps finis n'est pas élémentaire.
4. Soit L le langage des anneaux $\{+, \cdot, -, 0, 1\}$. Soient F et K deux corps. Montrez que F est un sous-corps de K ssi F est une sous-structure de K .
5. Donner une axiomatisation de la théorie des corps algébriquement clos. Montrer que cette théorie n'est pas complète.
6. Soit $E(., .)$ une relation binaire, soit $\mathcal{L} := \{E\}$ and soit T_E un ensemble de \mathcal{L} -énoncés qui exprime que E est une relation d'équivalence qui a, pour chaque $n \in \omega - \{0\}$, une seule classe d'équivalence qui contient exactement n éléments. Montrer que T_E est consistante, que T_E a l'e.q., que T_E est complète et que T_E a un modèle où il y a un nombre infini de classes d'équivalence infinies.
7. Donnez une axiomatisation de la classe des groupes abéliens totalement ordonnés.
8. Donnez une axiomatisation de la classe des corps commutatifs totalement ordonnés.
9. Montrer que la classe des anneaux commutatifs locaux c.a.d. avec un unique idéal maximal est finiment axiomatisable. (Donner aussi un exemple d'un tel anneau.)
10. Montrez que la classe des groupes abéliens, sans-torsion, divisibles est élémentaire, mais pas finiment axiomatisable.
11. Montrez qu'il y a \aleph_0 groupes abéliens, sans-torsion, divisibles dénombrables non-isomorphes.
12. Montrez que la classe des groupes abéliens de torsion n'est pas élémentaire.
13. Soit $(G, +, <, 0)$ un groupe abélien totalement ordonné; G est archimédien si pour tout x, y dans G , tels que $0 < x < y$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y < m.x$. Montrez que la classe des groupes archimédiens n'est pas élémentaire.

14. Montrer que $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +, 0)$ n'est pas élémentairement équivalent à $(\mathbb{Z}, +, 0)$.
15. Montrez que la classe des groupes linéaires de degré n est élémentaire.
(Rappel : un groupe est dit linéaire de degré n si c'est un sous-groupe d'un groupe de matrices $n \times n$ sur un corps commutatif.)
16. En choisissant le langage, montrer que les classes suivantes sont élémentaires : (voir [2] pages 37, 38).
 - (i) la classe des ordres totaux denses sans extrémités
 - (ii) la classe des ordres partiels
 - (iii) la classe des arbres binaires
17. Trouver deux ordres totaux denses sans extrémités non-isomorphes mais de même cardinalité.
18. Soient T_1 et T_2 deux \mathcal{L} -théories consistentes telles que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Alors il existe un énoncé θ tel que $T_1 \models \theta$ et $T_2 \models \neg\theta$.
19. Soient T_1 et T_2 deux \mathcal{L} -théories telles que pour toute \mathcal{L} -structure \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models T_1$ ssi $\mathcal{A} \not\models T_2$. Montrez que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Chapitre 7

Théories \aleph_0 -catégoriques

7.1 Théorème d'omission des types

Soit T une \mathcal{L} -théorie complète, soit \bar{c} un n -uple de constantes n'apparaissant pas dans \mathcal{L} , et soit $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ un point isolé c.a.d. qu'il existe $\phi(\bar{c})$ telle que $\{p(\bar{c})\} = [\phi(\bar{c})]$ (Définition 6.3.1). Explicitons ce que veut dire $\{p(\bar{c})\} = [\phi(\bar{c})]$ (\star). On a que $T \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$ pour tout $\psi(\bar{c}) \in p(\bar{c})$. (Sinon pour une certaine formule $\psi(\bar{c}) \in p(\bar{c})$, on aurait que $T \cup \{\phi(\bar{c}), \neg\psi(\bar{c})\}$ est consistente, ce qui contredit (\star .)

Lemme 7.1.1 *Soit $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ un point isolé par la formule $\phi(\bar{c})$. Alors p est réalisé dans tout modèle de T .*

Preuve : Soit $\mathcal{N} \models T$ qui réalise $p(\bar{x})$ c.a.d. un modèle de T où on peut trouver un n -uple \bar{a} tel que pour toute formule $\psi(\bar{x})$ appartenant à $p(\bar{x})$, on a $\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$ et en particulier $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$. Donc $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Comme T est complète on a que dans tout modèle \mathcal{M} de T , $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Soit $\bar{b} \subset M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{b})$. Comme $T \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$ pour tout $\psi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, on a que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{b})$ et donc \bar{b} réalise $p(\bar{x})$ dans \mathcal{M} .

Définition 7.1.1 Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente, et \mathcal{M} un modèle de T . On dira qu'un n -type $p(\bar{x})$ consistant avec T est omis dans \mathcal{M} s'il n'est pas réalisé dans \mathcal{M} c.a.d. où aucun n -uplet de M ne réalise $p(\bar{x})$.

On dira qu'un n -type complet $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ est un point non isolé (de $S_n(T)$) si pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(\bar{x})$ à n variables libres, $[\phi(\bar{c})] \neq \{p(\bar{c})\}$. Si $p(\bar{c}) \in [\phi(\bar{c})]$ et $p(\bar{c})$ non isolé, alors il existe $\theta(\bar{x}) \in p(\bar{x}), T \cup \{\phi(\bar{c})\} \not\models \theta(\bar{c})$ (voir section 6.3).

Exercice :

- Soit $T := ACF$ et soit $p(x) := \{q(X) \neq 0 : q(X) \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}\}$. Montrer que $q(x)$ n'est pas réalisé dans $\tilde{\mathbb{Q}}$. Déterminer les points isolés de $S_1(T)$.
- Soit $T = RCF$, déterminer les points isolés de $S_1(T)$.

Théorème 7.1.2 (Théorème d'omission des types.) *Soit \mathcal{L} un langage dénombrable et T une \mathcal{L} -théorie consistente. Soit $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ un point non isolé. Alors il existe un modèle dénombrable \mathcal{M} de T où ce type p est omis.*

Preuve : On étend itérativement T en une \mathcal{L}^* -théorie T^* complète (où $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^*$) telle que si $\mathcal{M} \models T^*$, on aura une sous- \mathcal{L} -structure dénombrable \mathcal{M}_0 qui sera un modèle dénombrable de T , omettant p . Chaque "étape itérative" sera divisée en trois sous-étapes, afin d'assurer complétude, test de Tarski-Vaught, omission de p .

On enrichit \mathcal{L} en y ajoutant un ensemble infini dénombrable C de nouveaux symboles de constante : $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup C$.

On énumère les \mathcal{L}^* -énoncés : $\varphi_0, \varphi_1, \dots$; ainsi que les n -uples de constantes de C : $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots$. On peut maintenant construire T^* en ajoutant à T des énoncés $\theta_n, n \in \omega$ de la façon suivante :

étape 0 : on pose $\theta_0 := \forall x(x = x)$

On suppose maintenant que θ_s , pour un certain s appartenant à ω , a été construit, que $T \cup \{\theta_s\}$ est une \mathcal{L}^* -théorie consistente, et telle que pour chaque $n < s$ on ait $T \cup \{\theta_s\} \models \theta_n$.

étape $s + 1$:

cas où $s + 1 = 3i + 1$ (ie s est un multiple de 3) :

Si $T \cup \{\theta_s, \varphi_i\}$ est consistente, on pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \varphi_i$; sinon on pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \neg \varphi_i$. Dans les deux cas $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente, et $T \cup \{\theta_{s+1}\} \models \theta_s$ (et donc satisfait aussi θ_n , pour $n < s$).

Notons que cela nous servira plus tard dans la preuve pour obtenir une théorie T^* complète. $s + 1 = 3i + 2$:

(Remarque : par rapport à la sous-étape précédente, cette "sous-étape-ci" permet d'itérer sur s sans itérer sur i)

-Si φ_i est de la forme $\exists v \psi(v)$ pour une certaine formule $\psi(v)$ (de complexité quelconque), et que $T \models \theta_s \rightarrow \varphi_i$, on prend une constante c dans C qui n'apparaît pas dans $T \cup \{\theta_s\}$, afin de construire un témoin de la satisfaisabilité de ψ . On pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \psi(c)$. Puis, étant donné que dans un modèle \mathcal{N} de $T \cup \{\theta_s\}$, il existe $a \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \psi(a)$, on pose $c^{\mathcal{N}} = a$, on a alors $\mathcal{N} \models T \cup \{\theta_{s+1}\}$. On a donc que $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente.

-Sinon on pose $\theta_{s+1} = \theta_s$.

$s + 1 = 3i + 3$:

On construit une \mathcal{L} -formule $\varphi(\bar{v})$ à partir de θ_s et de \bar{d}_i de la façon suivante : on remplace \bar{d}_i par un n -uple de variables \bar{v} dans θ_s , et on remplace chaque autre symbole de constante $c \in C \setminus \bar{d}_i$ qui apparaît dans θ_s par une variable v_c . Puis on quantifie existentiellement les variables v_c . (les variables de \bar{v} sont donc libres dans la nouvelle formule, tandis que les variables v_c sont liées)

Comme p n'est pas isolé, $[\varphi(\bar{v})] \neq \{p\}$; il y a donc une formule $\sigma(\bar{v}) \in p$ telle que $T \not\models \forall \bar{v}(\varphi(\bar{v}) \rightarrow \sigma(\bar{v}))$ (*) (voir la discussion avant la Définition 7.1.1). On pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \neg \sigma(\bar{d}_i)$, afin que \bar{d}_i ne satisfasse pas p dans le modèle que l'on veut construire (i.e. $T \cup \{\varphi(\bar{d}_i)\} \not\models p$).

$T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente car d'après (*), il existe \mathcal{N} modèle de T et $\bar{a} \subseteq N$ tel que $\varphi(\bar{a})$ et $\neg \sigma(\bar{a})$. En posant $\bar{d}_i^{\mathcal{N}} = \bar{a}$, et en interprétant les constantes $c \in C \setminus \bar{d}_i$ comme les témoins de l'existence des v_c , \mathcal{N} est un modèle de $T \cup \{\theta_{s+1}\}$.

Donc $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente et satisfait θ_s .

Posons maintenant $T^* = T \cup \{\theta_n : n \in \omega\}$. T^* est consistente car finiment consistente, et elle est complète car aux étapes $3i+1$ on a ajouté soit φ_i , soit $\neg\varphi_i$. Soit \mathcal{M} une \mathcal{L}^* -structure satisfaisant T^* . On pose $M_0 = \{c^{\mathcal{M}} : c \in C\}$. M_0 est dénombrable car C l'est. M_0 est le domaine d'une \mathcal{L} -sous-structure \mathcal{M}_0 de $\mathcal{M}_{\upharpoonright_{\mathcal{L}}}$, et c'est une sous-structure élémentaire (étapes $3i+2$, complétude de T^* et Test de Tarski-Vaught (voir chapitre 5) :

Soit $\phi(x, \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule et $\bar{a} \subseteq M_0$. Supposons que $\mathcal{M}_{\upharpoonright_{\mathcal{L}}} \models \exists x \phi(x, \bar{a})$. Comme $\bar{a} = \bar{d}^{\mathcal{M}}$ pour un $\bar{d} \subseteq C$, en posant $\varphi := \exists x \phi(x, \bar{d})$: φ est un \mathcal{L}^* -énoncé et donc de la forme φ_i pour un certain $i \in \omega$. Comme $\mathcal{M} \models \varphi_i$ et que \mathcal{M} est un modèle de T^* qui est complète, on a : $T^* \models \varphi_i$. Il existe donc s tel que $T \models \theta_s \rightarrow \varphi_i$; et donc par construction (étapes $3i+2$), il existe une constante $c \in C$ qui n'apparaît pas dans $T \cup \{\theta_s\}$ telle que $\theta_{s+1} = \theta_s \& \phi(c, \bar{d})$ avec $\theta_{s+1} \in T^*$. Comme $\mathcal{M} \models T^*$, $\mathcal{M} \models \phi(c^{\mathcal{M}}, \bar{a})$, or $c^{\mathcal{M}} \in M_0$ et donc par le test de Tarski-Vaught, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$.

\mathcal{M}_0 ne réalise pas p : soit $\bar{a} \in M_0^n$, alors il existe \bar{d}_i tel que $\bar{d}_i^{\mathcal{M}_0} = \bar{a}$. A l'étape $3i+3$, on a posé $\theta_{s+1} = \theta_s \& \neg\sigma(\bar{d}_i)$, où $\sigma \in p$.

□

7.2 Modèles atomiques et va-et-vient

Définition 7.2.1 Soit \mathcal{L} un langage dénombrable, T une \mathcal{L} -théorie (complète) et supposons que T n'a que des modèles infinis. Un modèle \mathcal{M} de T est *atomique* si pour tout $n \in \omega$ le type d'un n -uple d'éléments de \mathcal{M} est isolé, ie : pour tout n -uple \bar{a} d'éléments de \mathcal{M} , $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est un point isolé dans $\mathcal{S}_n(Th(\mathcal{M}))$.

Notons que si T est une \mathcal{L} théorie complète, toute paire de modèles atomiques \mathcal{M}, \mathcal{N} de T réalisent les mêmes types. Soit $p \in \mathcal{S}_n(T)$ et supposons que \mathcal{M} réalise p . Il existe donc un n -uple \bar{a} d'éléments de \mathcal{M} tel que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = p$. Par hypothèse, $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est isolé et donc il existe une formule $\phi(\bar{x})$ telle que $[\phi(\bar{x})] = \{p\}$. Comme T est complète, $\exists \bar{x} \phi(\bar{x})$ est une conséquence de T et donc $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Soit $\bar{b} \subset \mathcal{N}$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{b})$. Par hypothèse sur ϕ , $tp^{\mathcal{N}}(\bar{b}) = p$.

Lemme 7.2.1 Soit \mathcal{L} un langage dénombrable, T une \mathcal{L} -théorie (complète) et supposons que T n'a que des modèles infinis. Si \mathcal{M} et \mathcal{B} sont deux modèles dénombrables atomiques de T qui réalisent les mêmes éléments de $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{S}_n(T)$, alors \mathcal{M} et \mathcal{B} sont isomorphes.

Preuve : Cette preuve est basée sur la technique de "va et vient" entre deux structures, comme la preuve du Théorème de Cantor 5.5.5. On énumère les éléments de \mathcal{M} et \mathcal{B} en les indexant par $n \in \omega$: $M = \{m_n : n \in \omega\}$ $B = \{b_n : n \in \omega\}$.

Soit donc m_0 le premier élément de \mathcal{M} , $tp^{\mathcal{M}}(m_0) \in \mathcal{S}_1(T)$ est isolé par hypothèse donc $tp^{\mathcal{M}}(m_0) = [\psi_0(x_0)]$, où ψ_0 est un $\mathcal{L} \cup \{x_0\}$ -énoncé. \mathcal{B} réalisant les mêmes types que \mathcal{M} , on peut choisir parmi les éléments de \mathcal{B} réalisant $tp^{\mathcal{M}}(m_0)$, un élément b_i avec i minimum. On renomme cet élément b'_0 ; et on pose $m'_0 := m_0$.

Soit maintenant $b_j \in B \setminus \{b'_0\}$ tel que j soit minimum; on le renomme b'_1 et on considère $tp^{\mathcal{B}}(b'_0, b'_1) \in \mathcal{S}_2(T)$.

Soit $\psi_1(x_0, x_1)$ la formule isolant $tp^{\mathcal{B}}(b'_0, b'_1)$.

$$\mathcal{B} \models \psi_0(b'_0) \rightarrow \exists x_1 \psi_1(b'_0, x_1)$$

Donc la formule " $\psi_0(x_0) \rightarrow \exists x_1 \psi_1(x_0, x_1)$ " est dans $tp^{\mathcal{B}}(b'_0) = tp^{\mathcal{M}}(m'_0)$. Il existe donc $m_k \in M \setminus \{m'_0\}$ tel que $\psi_1(m'_0, m_k)$. On peut choisir k minimum, comme fait précédemment. Remarque : dans \mathcal{B} , $b'_1 \neq b'_0$, donc ces deux éléments vérifient la formule " $x_0 \neq x_1$ ". c'est pour cela que, par complétude de $tp^{\mathcal{B}}(b'_0, b'_1)$, on peut prendre aussi deux éléments différents dans \mathcal{M} (En fait on a : $\psi_1(x_0, x_1) \rightarrow x_0 \neq x_1$).

On pose $m'_1 := m_k$.

On prend ensuite le premier élément de $M \setminus \{m'_0, m'_1\}$, etc...

On obtient alors deux séquences infinies dénombrables m'_0, m'_1, \dots et b'_0, b'_1, \dots telles que :

$$M = \{m'_0, m'_1, \dots\} \quad B = \{b'_0, b'_1, \dots\}$$

(notons qu'en prenant les indices minimaux, on n'oublie aucun élément ; ie on a considéré tous les éléments de \mathcal{M} et tous ceux de \mathcal{B}).

Soit $f : m'_n \mapsto b'_n$. Par construction, pour chaque n les n -uples (m'_0, \dots, m'_{n-1}) et (b'_0, \dots, b'_{n-1}) satisfont les mêmes types, f définit donc un isomorphisme de \mathcal{M} dans \mathcal{B} .

(Remarque : deux uples quelconques $(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$ et $(b_{i_1}, \dots, b_{i_k})$ satisfont eux aussi les mêmes types : en effet il existe l , $(m_{i_1}, \dots, m_{i_k}) \subseteq (m_0, \dots, m_l)$, avec $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, l\}$ tels que $m_{i_1} = m_{j_1}, \dots, m_{i_k} = m_{j_k}$. Remarquons que $tp^{\mathcal{M}}(m'_0, \dots, m'_k) \supseteq tp^{\mathcal{M}}(m_0, \dots, m_l)$. Par définition de f , on a

$$(f(m_{i_1}), \dots, f(m_{i_k})) \subseteq (b'_0, \dots, b'_l)$$

donc $tp^{\mathcal{B}}(f(m_{i_1}), \dots, f(m_{i_k})) \subseteq tp^{\mathcal{B}}(b'_0, \dots, b'_l) = tp^{\mathcal{M}}(m'_0, \dots, m'_k)$. \square

7.3 Théorème de Ryll-Nardewski

Théorème 7.3.1 (Théorème de Ryll-Nardewski). *Soit \mathcal{L} un langage dénombrable, T une \mathcal{L} -théorie complète et supposons que T n'a que des modèles infinis.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est \aleph_0 -catégorique ;

(ii) pour tout n , $S_n(T)$ est fini ;

(iii) pour tout n , il existe un nombre fini de formules à n variables libres telles que toute formule à n variables libres soit équivalente à l'une d'entre elles, dans tout modèle de T .

Preuve : (i) \rightarrow (ii) :

Supposons que T est \aleph_0 -catégorique et qu'il existe n tel que $S_n(T)$ soit infini. L'espace $\mathcal{S}_n(T)$ est compact donc il admet alors un point non isolé p . Par le théorème d'omission des types, il existe un modèle dénombrable \mathcal{M} de T où p n'est pas réalisé.

Soit $\mathcal{N} \models T$ tel que \mathcal{N} réalise p (p est consistant avec T), ie : $\exists a_1, \dots, a_n \in N, p = tp^{\mathcal{N}}(\bar{a}) (= \{\phi(v_1, \dots, v_n) \text{ } \mathcal{L}\text{-formules : } \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})\})$.

Par le théorème de Löwenheim-Skolem, il existe une sous-structure élémentaire \mathcal{N}_0 de \mathcal{N} qui contient \bar{a} et qui est infinie dénombrable. On a donc $|\mathcal{N}_0| = |\mathcal{M}| = \aleph_0$, tandis que $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{N}_0$, ce qui contredit la catégoricité de T .

(ii) \rightarrow (iii) On va montrer un résultat un peu plus fort : pour n fixé, $S_n(T)$ est fini implique qu'il existe un nombre fini de formules à n variables libres telles que toute autre formule à n variables libres soit équivalente à l'une d'entre elles, i.e. il existe

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_1, \dots, x_n)$$

telles que, pour $\phi(x_1, \dots, x_n)$, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$, $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}))$.

$S_n(T)$ est fini par hypothèse : soient donc $\theta_1, \dots, \theta_k$ des formules à n variables libres telles que $[\theta_i] = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, k$, et $\{p_1, \dots, p_k\} = S_n(T)$. Tout ouvert dans $\mathcal{S}_n(T)$ est une union finie d'ouverts de base $\{[\theta_i], i = 1, \dots, k\}$.

Pour $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, on pose

$$\psi_J = \bigvee_{i \in J} \theta_i$$

Soit $\phi(\bar{x})$ une \mathcal{L} -formule, on considère $[\phi(\bar{x})]$ dans $\mathcal{S}_n(T)$: il existe $J' \subseteq \{1, \dots, k\}$,

$$[\phi(\bar{x})] = \bigcup_{j \in J'} \{p_j : j \in J'\} = \bigcup_{j \in J'} [\theta_j] = [\bigvee_{j \in J'} \theta_j(\bar{x})] = [\psi_{J'}(\bar{x})]$$

On a alors : $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_{J'}(\bar{x}))$; car sinon il existerait \mathcal{A} satisfaisant T et $\bar{a} \subseteq A$ tels que $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a}) \ \& \ \neg \psi_{J'}(\bar{a})$ (ou $\mathcal{A} \models \neg \phi(\bar{a}) \ \& \ \psi_{J'}(\bar{a})$). Alors, en posant $q = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a})$, on aurait $q \in [\phi] \setminus [\psi_{J'}]$ (ou $q \in [\psi_{J'}] \setminus [\phi]$).

(iii) \rightarrow (i)

(Notons que le cas $n = 0$ implique que T est complète). Grâce au lemme 7.2.1, il suffit de montrer que si T satisfait (iii) et si $\mathcal{M} \models T$, alors \mathcal{M} est atomique. (En effet si deux modèles de T sont atomiques, ils réalisent les mêmes types (voir remarque précédant le Lemme) et donc s'ils sont tous les deux infinis dénombrables, ils sont isomorphes par le Lemme 7.2.1.)

Soit $\bar{a} \in M^n$. Par hypothèse, il existe ψ_1, \dots, ψ_m telles que toute formule $\phi(\bar{x})$ soit équivalente dans les modèles de T à l'une d'entre elles. Soit $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathcal{M} \models \psi_j(\bar{a})$ ssi $j \in J$.

Affirmation : $\{tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})\} = [\bigwedge_{j \in J} \psi_j]$ (*) ce qui signifie que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est isolé.

Montrons (*) :

\subseteq : $\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in J} \psi_j(\bar{a})$, donc $\bigwedge_{j \in J} \psi_j \in \{\phi(\bar{v}) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\} = tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$, ie $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in [\bigwedge_{j \in J} \psi_j]$.

\supseteq : Montrons que l'intersection est un singleton. Soit $p \neq tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ tel que $p \in \bigcap_{j \in J} [\psi_j]$. Il existe donc ϕ telle que $\phi \in p \ \& \ \phi \notin tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$. Or $\phi \notin tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \leftrightarrow \neg \phi(\bar{a})$. Par hypothèse, $T \models \neg \phi \leftrightarrow \psi_j$ pour un certain j . Mais alors $\mathcal{M} \models \psi_j(\bar{a})$ et donc $j \in J$; or $p \in [\psi_j]$: contradiction. \square

Chapitre 8

Théorèmes de préservation.

8.1 Théories modèles-complètes

Rappelons qu'une \mathcal{L} -théorie T est modèle-complète si pour toute paire de modèles $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de T , on a $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. (Voir Définition 4.2.4).

Définition 8.1.1 Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. On dira que \mathcal{A} est existentiellement close dans \mathcal{B} (noté $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$) si pour toute formule existentielle $\phi(\bar{x})$ et tout uple d'éléments \bar{a} de A , si $\mathcal{B} \models \phi(\bar{a})$, alors $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

Théorème 8.1.1 Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est modèle-complète,
2. pour tous modèles \mathcal{A} et \mathcal{B} de T tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$,
3. toute \mathcal{L} -formule est équivalente dans T à une formule universelle,
4. toute \mathcal{L} -formule est équivalente dans T à une formule existentielle.

Preuve : Montrons (2) \rightarrow (3). Les autres implications sont laissées en exercice.

Tout d'abord on remarque qu'il suffit de montrer que toute formule existentielle est équivalente à une formule universelle.

Soit $\phi(\bar{x})$ une formule existentielle et soit $\Gamma(\bar{x})$ l'ensemble des formules universelles impliquées dans les modèles de T par $\phi(\bar{x})$ c.a.d.

$\Gamma(\bar{x}) := \{\gamma(\bar{x}) : T \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \rightarrow \gamma(\bar{x})), \text{ où } \gamma(\bar{x}) \text{ est universelle}\}.$

Soit $\bar{d} := (d_1, \dots, d_n)$ des symboles pour n nouvelles constantes et $\mathcal{L}_{\bar{d}} := \mathcal{L} \cup \{d_1, \dots, d_n\}$.

Soit \mathcal{A} une $\mathcal{L}_{\bar{d}}$ -structure, modèle de $T \cup \Gamma(\bar{d})$. Soit $Diag(\mathcal{A})$ le diagramme (sans quantificateurs) de \mathcal{A} dans $\mathcal{L}_{\bar{d}} := \{c_a : a \in A\}$.

(i) Montrons tout d'abord que la $\mathcal{L}_{\bar{d}}$ -théorie $T_A := T \cup Diag(\mathcal{A}) \cup \{\phi(\bar{d})\}$ est consistente.

Cela impliquera que $T \cup \Gamma(\bar{d}) \models \phi(\bar{d})$. En effet, soit $\mathcal{A} \models T \cup \Gamma(\bar{d})$. Par le point précédent, T_A est consistente et donc il existe un modèle \mathcal{B} de T_A contenant \mathcal{A} où $\phi(\bar{d})$ est vraie. Par hypothèse $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ et donc $\mathcal{A} \models \phi(\bar{d})$.

(ii) Montrons que T_A est consistente. Par le théorème de compacité, il suffit de prendre un nombre fini $\psi_1(\bar{a}, \bar{d}), \dots, \psi_m(\bar{a}, \bar{d})$ appartenant à $Diag(\mathcal{A})$. Donc $\mathcal{A} \models \exists \bar{x} \bigwedge_i \psi_i(\bar{x}, \bar{d})$ et donc comme $\mathcal{A} \models T, \forall x \neg \bigwedge_i \psi_i(\bar{x}, \bar{d})$ n'est pas une conséquence de T et donc pas une conséquence de $T \cup \{\phi(\bar{d})\}$ et donc il existe un modèle de $T \cup \{\phi(\bar{d})\} \cup \{\exists \bar{x} \bigwedge_i \psi_i(\bar{x}, \bar{d})\}$.

(iii) Donc $T \cup \Gamma(\bar{d}) \models \phi(\bar{d})$. Par le théorème de compacité, il existe un nombre fini de formules (universelles) $\gamma_1(\bar{x}), \dots, \gamma_k(\bar{x})$ appartenant à $\Gamma(\bar{x})$ telles que

$$T \cup \{\gamma_1(\bar{d}), \dots, \gamma_k(\bar{d})\} \models \phi(\bar{d}).$$

Comme \bar{d} sont des constantes n'appartenant pas à \mathcal{L} , cela implique que

$$T \models \forall x \left(\bigwedge_{j=1}^k \gamma_j(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}) \right).$$

Par choix de $\Gamma(\bar{x})$, on obtient :

$$T \models \forall x \left(\bigwedge_{j=1}^k \gamma_j(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}) \right).$$

□

Lemme 8.1.2 ([1] chapitre 4, Corollaire 4.3.8) *Si \mathcal{A} est une \mathcal{L} -structure infinie, alors \mathcal{A} a des ultrapuissances de cardinalité arbitrairement grandes.* □

Preuve : (Idée) Un ultrafiltre \mathcal{U} sur I est dit κ -régulier s'il existe un sous-ensemble $E \subset \mathcal{U}$ de cardinalité κ tel que tout $i \in I$ n'appartient qu'à un nombre fini d'éléments de E . On montre que si I est un ensemble de cardinalité κ , alors il existe un ultrafiltre κ -régulier sur I . Ensuite que si \mathcal{U} est un tel ultrafiltre $|\prod_I^{\mathcal{U}} \mathcal{A}| = |\mathcal{A}|^\kappa$. □

Remarque : tout ultrafiltre non principal sur ω est ω -régulier. On peut prendre pour $E := \{[n + \infty[: n \in \omega\}$.

Lemme 8.1.3 *Soit T une \mathcal{L} -théorie consistante et soit κ un cardinal infini plus grand que la cardinalité de \mathcal{L} . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tous modèles \mathcal{A} et \mathcal{B} de T tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$,*
2. *pour tous modèles \mathcal{A} et \mathcal{B} de T de cardinalité κ tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$.*

Preuve : Supposons que (2) est vrai et soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ deux modèles de T . Soit $\phi(\bar{x})$ une \mathcal{L} -formule existentielle, \bar{a} un uple d'éléments de A et supposons que $\mathcal{B} \models \phi(\bar{a})$. Montrons que $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

Si la cardinalité de \mathcal{A} est plus grande ou égale à κ , par le théorème de Lowenheim-Skolem (descendant), il existe une sous-structure élémentaire \mathcal{A}_0 de \mathcal{A} contenant \bar{a} de cardinalité κ . Réappliquant le même théorème, on peut trouver une sous-structure élémentaire \mathcal{B}_0 de \mathcal{B} contenant \mathcal{A}_0 de cardinalité κ . Comme $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0 \models \phi(\bar{a})$ et donc comme $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$ sont de cardinalité κ , par hypothèse $\mathcal{A}_0 \models \phi(\bar{a})$. Donc $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

Si la cardinalité de \mathcal{A} est strictement plus petite que κ , on construit une ultrapuissance de \mathcal{A} de cardinalité plus grande ou égale à κ , disons $\prod_I^{\mathcal{U}} \mathcal{A}$, pour un certain I et ultrafiltre \mathcal{U} sur I et on se ramène au cas précédent. □

Définition 8.1.2 On dit qu'une \mathcal{L} -structure \mathcal{C} est existentiellement close dans une classe \mathcal{K} de \mathcal{L} -structures si toute formule existentielle à paramètres dans \mathcal{C} satisfaite dans une extension de \mathcal{C} appartenant à \mathcal{K} est déjà satisfaite dans \mathcal{C} .

Remarque. Utilisant cette définition et paraphrasant le théorème précédent, une classe élémentaire \mathcal{K} de \mathcal{L} -structures est la classe des modèles d'une \mathcal{L} -théorie modèle-complète ssi ses éléments sont existentiellement clos dans \mathcal{K} ssi ses éléments sont existentiellement clos dans la sous-classe de \mathcal{K} des structures de cardinalité κ , où κ est un cardinal infini plus grand que la cardinalité de \mathcal{L} .

Théorème 8.1.4 (Critère de Lindström) *Soit T une théorie qui n'a pas de modèles finis. Supposons T fermée par unions de chaînes et κ -catégorique (où κ est un cardinal infini plus grand que la cardinalité de \mathcal{L}), alors T est modèle-complète.*

Preuve : Soit \mathcal{A} un modèle de T de cardinalité κ . Nous allons montrer que \mathcal{A} se plonge dans un modèle existentiellement clos de cardinalité κ . Or T est κ -catégorique et donc $\mathcal{A} \cong \tilde{\mathcal{A}}$. Par le Lemme et le Théorème précédents, cela implique que T est modèle-complète.

Construisons $\tilde{\mathcal{A}}$. On construit une chaîne infinie dénombrable de modèles \mathcal{B}_n de T de cardinalité κ , où $\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$ et toute formule existentielle à paramètres dans \mathcal{B}_n vraie dans un modèle de T étendant \mathcal{B}_n sera vraie dans \mathcal{B}_{n+1} . On posera $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$, $\tilde{\mathcal{A}}$ sera un modèle de T car T est clos par union de chaînes et sera existentiellement close car tout uple d'éléments se trouvera dans un des \mathcal{B}_n .

Montrons comment construire \mathcal{B}_1 . Ce sera également l'union d'une chaîne de modèles de T mais indexé par l'ensemble des formules existentielles à paramètres dans \mathcal{A} . Enumérons ces formules par un ordinal λ qui sera nécessairement de cardinalité κ et considérons $\phi_0(\bar{a}) := \exists \bar{x} \theta(\bar{x}, \bar{a})$, où $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs.

Soit dans une extension $\mathcal{C} \models T$ de \mathcal{A} il existe \bar{c} tel que $\mathcal{C} \models \theta(\bar{c}, \bar{a})$ et donc soit \mathcal{A}_1 une sous-structure élémentaire de \mathcal{C} contenant $\mathcal{A} \cup \{\bar{c}\}$ de cardinalité κ . Donc $\mathcal{A}_1 \models T$ et satisfait $\phi_0(\bar{a})$. Par hypothèse d'induction, on suppose que \mathcal{A}_α est un modèle de T contenant \mathcal{A} , de cardinalité κ et satisfait toutes les formules ϕ_β , pour $\beta < \alpha$, dès qu'elles sont satisfaites dans une extension (de \mathcal{A}_α). On construit $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ comme ci-dessus. Pour γ un ordinal limite, on pose $\mathcal{A}_\gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{A}_\beta$. \square

Applications : Ce critère donne une autre preuve que ACF_0 est modèle-complète, utilisant le fait que ACF_0 est 2^{\aleph_0} -catégorique et que le schéma d'axiomes donné pour ACF_0 est $\forall\exists$.

La théorie des ordres denses sans premiers ni derniers éléments est modèle-complète. On utilise le fait que cette théorie est \aleph_0 -catégorique (voir Théorème 5.5.5) et qu'elle a une axiomatisation $\forall\exists$.

8.2 Amalgamation

Théorème 8.2.1 (*Amalgamation élémentaire*) *Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux \mathcal{L} -structures et supposons qu'il y ait un plongement f de la \mathcal{L} -sous-structure $\langle \bar{a} \rangle_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} engendrée par \bar{a} dans \mathcal{C} , où \bar{a} est un uple éventuellement infini. Supposons en outre que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$.*

Alors il existe une extension élémentaire \mathcal{D} de \mathcal{B} et un plongement élémentaire $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $g \circ f(\bar{a}) = \bar{a}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{f} & \mathcal{D} \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow g \\ \langle \bar{a} \rangle_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} \end{array}$$

Preuve : On montre que $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag_{el}(\mathcal{C})$ est une théorie consistante, en supposant que $B \cap C = \langle \bar{a} \rangle$ et en identifiant \bar{a} et $f(\bar{a})$. Sinon en utilisant le théorème de compacité, cela impliquerait qu'il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et un uple $\bar{d} \subset C - \langle \bar{a} \rangle$ tel que $Diag_{el}(\mathcal{B}) \models \neg\phi(\bar{a}, \bar{d})$. Donc, $Diag_{el}(\mathcal{B}) \models \forall \bar{x} \neg\phi(\bar{a}, \bar{x})$. Ce qui est équivalent à $(\mathcal{B}, \bar{a}) \models \forall \bar{x} \neg\phi(\bar{a}, \bar{x})$. Par hypothèse cela implique que $(\mathcal{C}, \bar{a}) \models \forall \bar{x} \neg\phi(\bar{a}, \bar{x})$, une contradiction.

Soit \mathcal{D} un modèle de $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag_{el}(\mathcal{C})$. Donc, le réduct de \mathcal{D} à \mathcal{L} est une extension élémentaire de \mathcal{B} . On définit pour tout $d \in C - \langle \bar{a} \rangle$, $g(d) = d^{\mathcal{D}}$ et $g(a) = a$. Ce plongement est élémentaire. \square

Définition 8.2.1 Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures. On note $\mathcal{A} \Rightarrow_1 \mathcal{B}$ si tout \mathcal{L} -énoncé existentiel vrai dans \mathcal{A} est vrai dans \mathcal{B} .

Théorème 8.2.2 (amalgamation existentielle) Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux \mathcal{L} -structures et supposons qu'il y ait un plongement f de la \mathcal{L} -sous-structure $\langle \bar{a} \rangle_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} engendrée par \bar{a} dans \mathcal{C} , où \bar{a} est un uple éventuellement infini. Supposons en outre que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \Rightarrow_1 (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$.

Alors il existe une extension élémentaire \mathcal{D} de \mathcal{B} et un plongement $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $g \circ f(\bar{a}) = \bar{a}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow g \\ \langle \bar{a} \rangle_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} \end{array}$$

Preuve : La preuve est similaire à celle du Théorème 8.2.1 mais ici on considère la théorie $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag(\mathcal{C})$

Corollaire 8.2.3 Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux \mathcal{L} -structures et supposons que $\mathcal{B} \Rightarrow_1 \mathcal{C}$. Alors \mathcal{C} se plonge dans une extension élémentaire de \mathcal{B} . \square

Notation 8.2.1 T_{\forall} est l'ensemble des conséquences universelles de T , autrement dit $T_{\forall} := \{\sigma : \sigma \text{ est un } \mathcal{L}\text{-énoncé universel tel que } T \models \sigma\}$.

Corollaire 8.2.4 Les modèles de T_{\forall} sont exactement les sous-structures des modèles de T .

Preuve : Soit $\mathcal{C} \models T_{\forall}$. Par le corollaire précédent il suffit de trouver un modèle \mathcal{B} de T tel que $\mathcal{B} \Rightarrow_1 \mathcal{C}$. On considère la théorie $T \cup \{\text{énoncés existentiels vrais dans } \mathcal{C}\}$. On montre que cette théorie est consistante. \square

Définition 8.2.2 Une théorie T a la propriété d'*amalgamation* si pour tous modèles \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} de T tels que il y a des plongements $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, alors il y a un modèle \mathcal{D} de T et des plongements $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$, $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $g \circ e = h \circ f$.

Théorème 8.2.5 Une théorie T a l'élimination des quantificateurs ssi T est modèle-complète et T_{\forall} a la propriété d'amalgamation.

Preuve : Voir [2] Theorem 8.4.1, page 382.

8.3 Exercices.

1. Soit \mathcal{C} une classe de \mathcal{L} -structures qui est inductive c.a.d. fermée par unions de chaînes. Soit \mathcal{C}^{ec} la classe des structures de \mathcal{C} qui sont existentiellement closes dans \mathcal{C} . Montrez que \mathcal{C}^{ec} est non vide et que cette classe est fermée par unions de chaînes.
2. Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre et T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$. Soit $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ deux \mathcal{L} -structures avec \mathcal{B} un modèle de T . Montrez que \mathcal{A} est un modèle de T et que si \mathcal{B} est existentiellement clos dans la classe des modèles de T , alors \mathcal{A} l'est également.
3. Soit T la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion dans le langage $\{+, -, 0\}$. Axiomatisez cette théorie. Montrez qu'elle est modèle-complète.
4. Soit p est un nombre premier, un p -groupe est un groupe où l'ordre de tout élément est une puissance de p . Y-a-t-il des p -groupes abéliens divisibles (non-triviaux)? Justifiez votre réponse.
5. Soit \mathcal{L} un langage dénombrable (fini ou infini). Rappelons la définition suivante. Soient T et T' deux \mathcal{L} -théories consistentes. On dit que T' est une *modèle-compagne* de T si T' est modèle-complète, si tout modèle de T se plonge dans un modèle de T' et tout modèle de T' se plonge dans un modèle de T .
 - (i) Montrer que si T_1 et T_2 sont deux modèle-compagnes de T , alors T_1 et T_2 ont les mêmes modèles.
 - (ii) Soit T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$, montrer que si T a une modèle-compagne T' , alors T' est la théorie de la classe des modèles existentiellement clos de T .
6. Montrer que si une \mathcal{L} -théorie T_0 est modèle-complète et si étant donnés deux modèles quelconques \mathcal{A}, \mathcal{B} de T_0 , il existe un troisième modèle \mathcal{C} de T_0 tel que \mathcal{A} et \mathcal{B} se plongent dans \mathcal{C} , alors T_0 est complète.
7. Soit $\mathcal{L} := \{<\}$ et soit T la \mathcal{L} -théorie des ordres totaux denses.
 - i) Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux modèles de T , montrer que le produit $(A \times B, <)$ est encore un modèle de T , où l'ordre $<$ est défini comme suit :
 $(a, b) < (c, d)$ si $(a < c$ ou $(a = c \ \& \ b < d))$, où $a, c \in A, b, d \in B$.
 - ii) Déterminer les complétions de T et les axiomatiser.
 - iii) Parmi ces complétions, quelles sont celles qui sont modèles-complètes?
 - iv) Montrer que T a une modèle-compagne et en donner une axiomatisation.

Annexe A

Rappels sur les algèbres de Boole.

Soit $\mathcal{L} := \{\wedge, \vee, ', 0, 1\}$ le langage des algèbres de Boole. Soit T la théorie suivante des algèbres de Boole dans le langage \mathcal{L} .

1. $0' = 1, 1' = 0$
2. $\forall x (x \wedge 0 = 0 \ \& \ x \vee 1 = 1)$
3. $\forall x (x \wedge 1 = x \ \& \ x \vee 0 = x)$
4. $\forall x (x \wedge x' = 0 \ \& \ x \vee x' = 1)$
5. $\forall x ((x')' = x)$
6. $\forall x (x \wedge x = x \ \& \ x \vee x = x)$
7. $\forall x \forall y ((x \wedge y)' = x' \vee y')$,
8. $\forall x \forall y (x \wedge y = y \wedge x \ \& \ x \vee y = y \vee x)$,
9. $\forall x \forall y \forall z (x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z) \ \& \ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$
10. $\forall x \forall y \forall z (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ \& \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$.

Exemple : Soit I un ensemble et $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble de toutes ses parties, la structure $(\mathcal{P}(I), \cap, \cup, ^c, \emptyset, I)$ est une algèbre de Boole.

Remarque : La théorie T des algèbres de Boole est axiomatisée par les axiomes : (3), (4), (8), (10).

Définition A.0.1 Soit $\mathcal{B} := (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ une algèbre de Boole. Un *atome* $a \in B$ est un élément non nul de B tel que $\forall b (a \wedge b = b \rightarrow (a = b \text{ ou } b = 0))$.

Sur \mathcal{B} on peut mettre un ordre partiel \leq défini par $c \leq d$ si $c \wedge d = c$.

Une algèbre de Boole est atomique si tout élément non nul contient un atome. dans ces algèbres, les atomes sont les éléments non nuls minimaux pour \leq .

Exercices :

Montrer qu'une algèbre de Boole finie est de la forme $\mathcal{P}(I)$, où I est l'ensemble de ses atomes.

Soit R un anneau unitaire satisfaisant à l'énoncé $\forall x (x^2 = x)$. Montrez que l'on peut munir R d'une structure d'algèbre de Boole.

Annexe B

Rappels très brefs sur les ordinaux et les cardinaux.

Ce chapitre est basée sur les chapitres 1 et 2 du livre de J-L Krivine ([5]) ainsi que sur l'appendice A, du livre de D. Marker ([6] pages 315-322.)

Tout d'abord, si $(A, <)$ est un ensemble totalement ordonné, on dit qu'il est *bien ordonné* (b.o.) si tout sous-ensemble non vide de A a un plus petit élément.

Exemples : $(\mathbb{N}, <)$ est b.o., alors que $(\mathbb{Z}, <)$ ne l'est pas.

Rappelons tout d'abord que le lemme de Zorn et le principe du bon ordre (i.e. tout ensemble peut être b.o.) sont des formes équivalentes de l'axiome du choix.

Un ensemble A est *transitif* si pour tout $a \in A$ et $b \in a$, on a $b \in A$ et donc si $x \in A$, alors $x \subset A$.

Un ensemble A est un *ordinal* si A est transitif et si la relation \in est une relation d'ordre (total) strict sur A qui est un bon ordre.

On notera la *classe* des ordinaux par On . En particulier, si $\alpha \in On$, alors $\alpha \notin \alpha$. Sur un ordinal α , on utilisera $<$ pour \in .

Sur la classe On , la relation \in est également transitive et c'est un ordre total strict qui est un bon ordre. Au lieu de $\alpha \in \beta$, on écrira $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in On$.

Par définition si $\alpha \in On$, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. De plus les segments initiaux d'un ordinal sont lui-même et ses éléments.

On supposera toujours le principe du bon ordre et donc tout ensemble A peut être bien ordonné, disons par un ordre $<$. De plus, il existe un ordinal α tel que $(A, <)$ est isomorphe à (α, \in) .

Montrons que On ne peut être un ensemble A . Par le principe du bon ordre A peut être b.o. et tout élément de A est un ordinal et donc est inclus à A . Donc A est un ordinal (car transitif et bien ordonné). Donc $A \in A$, ce qui contredit le fait que sur les ordinaux la relation d'appartenance soit une relation d'ordre strict.

Démonstration par induction. Soit $P(x)$ une formule à une variable libre et supposons que l'on veuille montrer que pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$. Alors il suffit de montrer pour tout α , si pour tout $\beta < \alpha$ on a $P(\beta)$, alors $P(\alpha)$.

Preuve : En effet s'il existe un ordinal α tel que $\neg P(\alpha)$, alors il en existe un plus petit disons

α_0 car On est bien ordonné. Donc, pour tout $\beta < \alpha_0$ on a $P(\beta)$, or par hypothèse on aurait $P(\alpha_0)$, une contradiction. \square

Si α est un ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal et c'est le plus petit ordinal plus grand que α . On dira que c'est le *successeur* de α . On le notera $\alpha + 1$.

Tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure qui est la réunion des éléments de cet ensemble. Soit a un ensemble d'ordinaux, alors sa borne supérieure est $\bigcup_{\gamma \in a} \gamma$.

Si un ordinal n'est pas le successeur d'un autre ordinal, on dira qu'il est *limite*. Notons que si α est un ordinal limite, alors pour tout $\beta < \alpha$, $\beta + 1 < \alpha$.

Notons que \emptyset est un ordinal et que c'est le plus petit ordinal car $\emptyset \subset \alpha$. Son successeur est $\{\emptyset\}$, le successeur est $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc. On dira qu'un ordinal α est *fini* si pour tout $\beta \leq \alpha$, $\beta \neq \emptyset$, il existe γ tel que $\beta = \gamma \cup \{\gamma\}$.

On note le plus petit ordinal infini ω .

Le *cardinal* de A est le plus petit ordinal tel qu'il existe un bon ordre $<$ sur A tel que $(A, <)$ est isomorphe à (α, \in) . On note cet ordinal par $|A|$

Un ordinal α est un cardinal si $\alpha = |\alpha|$. Les ordinaux finis sont tous des cardinaux et l'ordinal ω est aussi un cardinal que l'on notera par \aleph_0 . La classe des cardinaux infinis est isomorphe (en tant que bon ordre) à On et si α est un ordinal, on note \aleph_α l'image de α par cet isomorphisme. En particulier on a que $\aleph_{\alpha+1}$ est le plus petit cardinal strictement plus grand que \aleph_α .

On définit la somme et le produit de deux cardinaux de la façon suivante. Soit $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$. Alors $\kappa + \lambda = |(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)|$ et $\kappa \cdot \lambda = |X \times Y|$.

On montre que si l'un des cardinaux est infini, $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

De plus si $|I| = \kappa$ et pour tout $i \in I$, $|A_i| \leq \kappa$, alors $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \kappa$.

En effet : Pour chaque i , comme $|A_i| \leq \kappa$, on peut construire une surjection $f_i : \kappa \rightarrow A_i$ (en utilisant l'axiome du choix). De même, il y a une surjection (en fait une bijection) $g : \kappa \rightarrow I$. On peut donc construire une surjection $f : \kappa \times \kappa \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$, $(\alpha, \beta) \mapsto f_{g(\alpha)}(\beta)$.

On définit l'exponentiation par $\kappa^\lambda := |X^Y|$, où X^Y dénote l'ensemble des fonctions de Y dans X .

On a pour $2 \leq \kappa < \lambda$ et $\aleph_0 \leq \lambda$ que $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

L'*hypothèse du continu (généralisée)* est l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$).

P. Cohen, en 1973, a montré qu'on ne pouvait prouver cette hypothèse dans ZFC mais qu'elle était consistante avec ZFC c.a.d. il a construit deux modèles de ZFC l'un où $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et l'autre où ces deux cardinaux étaient différents.

Annexe C

Exercices résolus.

Dans ce chapitre, nous résolvons certains des exercices proposés (de nature et difficulté diverses). Parfois, la solution de certains des exercices est simplement *indiquée* mais non *rédigée*.

C.1 Section 5.2.

1. Soit s la fonction successeur dans \mathbb{N} et dans \mathbb{Z} . Montrez que (\mathbb{N}, s) est une sous-structure de (\mathbb{Z}, s) , mais pas une sous-structure élémentaire.

Sous-structure : l'identité est bien un plongement préservant la fonction successeur. Soit maintenant la formule $\phi(y) := \forall x \neg(y = s(x))$. $(\mathbb{N}, s) \models \phi(0)$ mais $(\mathbb{Z}, s) \not\models \phi(0)$.

2. Montrez que l'anneau des entiers $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ a des fonctions de Skolem définissables.

(Aide : tout entier positif est somme de 4 carrés.)

Soit $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, une formule dans le langage des anneaux. On définit \leq par : $x \leq y$ ssi $\exists z_1 \dots \exists z_4 (y - x = z_1^2 + \dots + z_4^2)$. On pose $\psi(\bar{x}, y) := \phi(\bar{x}, y) \& \forall z ((0 \leq z \leq y \text{ ou } y \leq z \leq 0) \rightarrow z = y \text{ ou } \neg\phi(\bar{x}, z))$.

3. Soit K un corps commutatif et soit $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Montrer que tout sous-ensemble de K définissable par une formule sans quantificateurs (à paramètres dans K) dans $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ est soit fini soit cofini.

Si $\phi(x, \bar{y})$ est une \mathcal{L} -formule atomique, alors il existe $q(X, \bar{Y}) \in \mathbb{Z}[X, \bar{Y}]$ telle que $\phi(x, \bar{y})$ ssi $q(x, \bar{y}) = 0$.

Si $X := \{x \in K : \phi(x, \bar{a})\}$, alors $X = \{x : q(x, \bar{a}) = 0\}$ et $q(X, \bar{a}) \in K[X]; \bar{a} \subseteq K$.

Notons que X est fini, ou $X = K$ si q est le polynôme nul. Les ensembles définissables par une formule sans quantificateurs sont des combinaisons booléennes (justifier) d'ensembles définissables par une formule atomique, donc sont soit finis,

soit cofinis (l'intersection de deux ensembles cofinis est cofinie).

Remarque : si $\{k_1, \dots, k_n\} \subseteq K$, il existe une formule $\phi(x, \bar{y})$ et $\bar{a} \in K^n$ tels que $\{k_1, \dots, k_n\} = \phi(K, \bar{a})$ (en prenant $\bar{a} = (k_1, \dots, k_n)$ et $\phi(x, \bar{y}) := (x - y_1) \dots (x - y_n)$).

4. Soient $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ le langage des anneaux et $\mathcal{L}_< := \mathcal{L} \cup \{<\}$ celui des anneaux totalement-ordonnés. Soit T la $\mathcal{L}_<$ -théorie des corps réels-clos.

Ecrivez une axiomatisation de T .

Montrez que T n'a pas l'élimination des quantificateurs dans le langage \mathcal{L} .

Montrez que T a des fonctions de Skolem définissables.

— Axiomes pour les corps commutatifs totalement ordonnés, et :

$$\begin{cases} \forall x_1 \dots \forall x_n (x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq -1) \\ \forall x \exists y (x = y^2 \text{ ou } -x = y^2) \\ \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y (y^n + x_1 y^{n-1} + \dots + x_{n-1} y + x_n = 0) \text{ (pour tous les } n \text{ impairs)} \end{cases}$$

— Prendre la formule $\exists y (y^2 = x)$ (qui est équivalente à $x \geq 0$); l'ensemble défini par cette formule n'est ni fini, ni cofini (voir la remarque page 25 et l'exercice précédent).

— Soit $\phi(\bar{x}, y)$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$, une $\mathcal{L}_<$ -formule. ϕ est une combinaison booléenne de formules du type $p_n(\bar{x})y^n + p_{n-1}(\bar{x})y^{n-1} + \dots + p_1(\bar{x})y + p_0(\bar{x}) \geq 0$, où p_1, \dots, p_n sont des polynômes à coefficients entiers. Ce type de formule peut être réécrit de la façon suivante : y est dans l'union d'un certain ensemble fini d'intervalles de la forme : $[s_0(\bar{x}); s_1(\bar{x})]$, $(-\infty; s_1(\bar{x})]$ ou $[s_0(\bar{x}), \infty)$, où $s_0(\bar{x}), s_1(\bar{x})$ sont des points définissables à partir de \bar{x} à l'aide de formules dépendant uniquement de p_0, \dots, p_n . Comme il est possible de définir un point d'un intervalle (par exemple son milieu) dont les extrémités sont définissables, la théorie a des fonctions de Skolem définissables.

5. Soit (\mathbb{N}^*, \leq) l'ensemble des nombres naturels non nuls muni de la relation d'ordre partiel suivante : $n \leq m$ si n divise m , pour $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les sous-ensembles suivants sont définissables sans paramètres : $\{1\}$, l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers, l'ensemble \mathcal{D} des nombres naturels non nuls qui ne sont pas divisibles par le carré d'un nombre premier.

Considérer les formules

— $\phi(n) := \forall m (n \leq m \rightarrow \exists k (m = kn))$; on a $\{1\} = \{n : \phi(n)\}$.

— $\psi(n) := \neg \phi(n) \ \& \ \forall m (m \leq n \rightarrow \phi(m) \vee m = n)$, on a $\mathcal{P} = \{n : \psi(n)\}$.

— $\theta(n) := \neg \phi(n) \ \& \ \neg \psi(n) \ \& \ \forall m (m \leq n \rightarrow \phi(m) \text{ ou } \psi(m) \text{ ou } m = n)$; on a $\mathcal{D} = \{n : \neg \theta(n)\}$

6. Pour tout langage \mathcal{L} , montrez que deux structures sont élémentairement équivalentes ssi elles le sont pour tout sous-langage fini.

Montrez que si \mathcal{L} est dénombrable, si T est une \mathcal{L} -théorie sans modèles finis et si deux modèles dénombrables sont élémentairement équivalents, alors T est complète.

- Soit \mathcal{M} et \mathcal{N} deux structures élémentairement équivalentes.
 - (\rightarrow) : On a : pour tout \mathcal{L} -énoncé ϕ , $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $\mathcal{N} \models \phi$. En particulier cela reste vrai pour tout sous-langage fini de \mathcal{L} .
 - (\leftarrow) : Soit ϕ un \mathcal{L} -énoncé. Soit \mathcal{L}' le sous-langage de \mathcal{L} formé des symboles de fonctions, relations et constantes apparaissant dans ϕ . \mathcal{L}' est fini et ϕ est un \mathcal{L}' -énoncé, donc on a : $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $\mathcal{N} \models \phi$.
- Soit ϕ une \mathcal{L} -formule, on veut montrer que $T \models \phi$ ou $T \models \neg\phi$. Si $T \not\models \phi$, il y a un modèle \mathcal{M} de T tel que $\mathcal{M} \models \neg\phi$. Soit X un sous-ensemble de M de cardinalité au plus \aleph_0 . Par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure élémentaire \mathcal{B} de \mathcal{M} , contenant X et de cardinalité inférieure ou égale à $|X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Puisque T n'a pas de modèle fini, $|B| = \aleph_0$. Comme \mathcal{B} est une sous-structure élémentaire, $\mathcal{B} \models \neg\phi$.
Si \mathcal{N} était un modèle de T tel que $\mathcal{N} \models \phi$, on pourrait de la même façon trouver une sous-structure élémentaire $\mathcal{A} \models \phi$ de cardinalité \aleph_0 . Mais cela contredirait le fait que deux modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents. Donc tous les modèles de T satisfont $\neg\phi$, ie $T \models \neg\phi$. Donc T est complète.

C.2 Section 5.6.

1. Montrez que la classe des groupes abéliens infinis où tout élément est d'ordre 2 est \aleph_0 -catégorique.

Soit $(G, +, 0)$ un groupe abélien où tout élément est d'ordre 2 (c.a.d tout élément différent de l'élément neutre est d'ordre 2). On peut voir G comme un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel, en définissant la multiplication par un scalaire de façon naturelle : $1.x := x$; $0.x := 0$. On a bien

$$x + x = 1.x + 1.x = (1 + 1).x = 0.x = 0$$

Réciproquement tout \mathbb{F}_2 -espace vectoriel peut être vu comme un groupe abélien où tout élément est d'ordre 2.

Si G est de cardinalité \aleph_0 , il correspond alors à un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel de dimension \aleph_0 .

2. Soit $\mathcal{L}_0 := \{s\}$, où s est un symbole de fonction unaire. Soit T l'ensemble des \mathcal{L}_0 énoncés qui expriment que s est une bijection sans cycles c.a.d. pour chaque $n \in \omega$, on a $\forall x s^n(x) \neq x$.
Montrer que T est \aleph_1 -catégorique mais pas \aleph_0 -catégorique.

Un modèle de T est un ensemble infini M sur lequel le groupe cyclique d'ordre infini (sans-torsion) $\langle s \rangle$ agit :

$$\begin{aligned} \langle s \rangle \times M &\rightarrow M \\ (s^z, m) &\mapsto s^z(m), \quad z \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Rappelons que les orbites forment une partition de M (elles sont disjointes et leur union est égale à M). Ici une orbite sous l'action de $\langle s \rangle$ correspond à l'ensemble des

images d'un point par $\langle s \rangle$:

$$\langle s \rangle \{m\} = \{s^z(m) : z \in \mathbb{Z}\}$$

\mathcal{M} vérifie $\forall x s^n(x) \neq x$, donc en particulier on a : $\forall x \bigwedge_{n \neq m, m, n \in \mathbb{Z}} s^n(x) \neq s^m(x)$, et donc chaque orbite est infinie dénombrable.

le cardinal d'un modèle M sera donc \aleph_0 "multiplié par le nombre d'orbites". (Notons aussi que T ne peut donc pas avoir de modèle fini.)

Si M est de cardinalité \aleph_0 , il peut y avoir une, deux, ..., \aleph_0 orbites, puisque $1 \cdot \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 = \dots = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 = |M|$. Or tout isomorphisme préserve les orbites.

Par contre, si M est de cardinalité \aleph_1 , le "nombre d'orbites" multiplié par le cardinal d'une orbite en particulier (ie par \aleph_0) devra évaluer \aleph_1 , donc il doit y avoir \aleph_1 orbites, ie les modèles de cardinalité \aleph_1 sont isomorphes.

C.3 Section 6.4.

1. Soit T une \mathcal{L} -théorie consistente. Montrez que T est complète ssi tous ses modèles sont élémentairement équivalents.

(\Rightarrow) Supposons que T soit complète.

Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux modèles de T . Supposons que $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$. Il existe donc un \mathcal{L} -énoncé τ tel que $\mathcal{A} \models \tau$ et $\mathcal{B} \not\models \tau$ (et donc $\mathcal{B} \models \neg\tau$). Donc $T \not\models \tau$ et $T \not\models \neg\tau$, ce qui contredit l'hypothèse que T soit complète.

(\Leftarrow) Supposons que tous les modèles de T sont élémentairement équivalents et soit τ un \mathcal{L} -énoncé. Comme T est consistente, T a au moins un modèle, disons \mathcal{A} . Soit $\mathcal{A} \models \tau$ et donc comme tout autre modèle de T est élémentairement équivalent à \mathcal{A} , τ est vrai dans tous les modèles de T , ou encore $T \models \tau$. Soit $\mathcal{A} \not\models \tau$, et donc $\mathcal{A} \models \neg\tau$ et par le même raisonnement, $T \models \neg\tau$.

Remarque : Notons que cet exercice implique que si T est complète, alors elle est équivalente à une théorie de la forme $Th(\mathcal{M})$, où $\mathcal{M} \models T$.

En effet, comme T est consistente, T a un modèle, disons \mathcal{M} . On a donc que $T \subset Th(\mathcal{M})$. Montrons que pour tout $\sigma \in Th(\mathcal{M})$, $T \models \sigma$ (et donc T et $Th(\mathcal{M})$ seront équivalentes). Par l'exercice, tout modèle de T satisfait σ (puisqu'il est élémentairement équivalent à \mathcal{M}), autrement dit $T \models \sigma$.

2. Montrez que la classe de tous les groupes est une classe élémentaire.

Pour $\mathcal{L} = \{., e\}$, une \mathcal{L} -structure est un ensemble muni d'une interprétation pour la fonction binaire ".", et pour la constante "e". On voit donc que les groupes sont des \mathcal{L} -structures.

Par définition, \mathcal{K} sera élémentaire s'il existe un ensemble de \mathcal{L} -énoncés Σ tel que \mathcal{K} soit la classe de tous les modèles de Σ (noté par $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$).

Une axiomatisation de la théorie des groupes est donnée, par exemple, par les trois énoncés suivants :

$\sigma_1 \equiv \forall x(e.x = x)$
 $\sigma_2 \equiv \forall x\forall y\forall z(x.(y.z) = (x.y).z)$
 $\sigma_3 \equiv \forall x\exists y(x.y = y.x = e)$
 On peut donc prendre $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Remarque : on a bien que $\Sigma \models \theta_1 \equiv \forall x(x.e = x \ \& \ e.x = x)$.

Preuve : Soit y tel que $e = y.x = x.y$. On a donc $x.e = x.(y.x) = (x.y).x = e.x = x$.

On aurait donc pu prendre aussi $\Sigma' = \{\theta_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

3. Montrez que la classe \mathcal{C} des corps finis n'est pas élémentaire.

Appliquer la Proposition 2.1 : cette classe n'est pas fermée par ultraproducts.

Voir exercice 12. Prendre

$$T_n := \begin{cases} \text{axiomes pour les corps} \\ A \\ \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j) \end{cases}$$

4. Donner une axiomatisation de la théorie des corps algébriquement clos. Montrer que cette théorie n'est pas complète.

Une axiomatisation (notée ACF) dans $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ est par exemple :

-axiomes pour les groupes additifs abéliens, et :

-axiomes pour les anneaux :

$\forall x\forall y\forall z (x - y = z \leftrightarrow x = y + z)$ car "-" a été ajouté dans le langage

$\forall x\forall y\forall z (x.(y.z) = (x.y).z)$

$\forall x (x.1 = 1.x = 1)$ (anneau unitaire)

on peut ajouter aussi : $\forall x(x.0 = 0.x = 0)$ mais cela découle des axiomes pour les groupes additifs et de la distributivité

$\forall x\forall y\forall z (x.(y + z) = (x.y) + (x.z))$

$\forall x\forall y\forall z ((x + y).z = (x.z) + (y.z))$

-axiomes spécifiques aux corps commutatifs :

$\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y x.y = 1)$

$\forall x\forall y (x.y = y.x)$ (commutativité)

-la série infinie d'axiomes (propriété d'être algébriquement clos) : pour chaque $n \in \omega$:

$$\forall a_0 \dots \forall a_{n-1} \exists x (x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0)$$

Soit maintenant ψ_p exprimant qu'un corps est de caractéristique p :

$$\psi_p := \forall x \underbrace{x + \dots + x}_{p \text{ fois}} = 0$$

Pour p un nombre premier strictement positif, soient $ACF_p := ACF \cup \{\psi_p\}$ et $ACF_0 := ACF \cup \{\neg\psi_p : p > 0\}$ les théories des corps algébriquement clos de caractéristiques respectives p et 0. Ces deux théories étant consistentes, ACF n'est pas complète.

5. Soit $\mathcal{L} = \{E\}$, où E une relation binaire. Soit T la \mathcal{L} -théorie d'une relation d'équivalence avec un nombre infini de classes infinies. Donner une axiomatisation de T .

- E est une relation d'équivalence :

$$\forall x E(x, x)$$

$$\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \rightarrow E(x, z))$$

-il y a une infinité de classes d'équivalence (série infinie des axiomes :)

$$\phi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg E(x_i, x_j) \right) \text{ pour chaque } n \in \omega$$

-chaque classe est infinie (série infinie des axiomes :)

$$\psi_n := \forall x \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^n E(x_i, x) \right) \text{ pour chaque } n \in \omega$$

6. On considère le langage $\mathcal{L} = \{E\}$, où E est une relation d'équivalence. On définit la \mathcal{L} -théorie $T := \{\sigma, \sigma_n : n \in \omega\}$ suivante :

$$\sigma := (\forall x E(x, x)) \ \& \ (\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))) \ \& \ (\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \ \& \ E(y, z)) \rightarrow E(x, z))).$$

E est une relation d'équivalence.

$$\sigma_{2n} := \exists u \tau_n(u), \text{ où } \tau_n(u) \text{ est la formule : } \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\left(\bigwedge_{i \neq j, i, j=1}^n x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{j=1}^n E(x_1, x_j) \right) \wedge \left(\forall x E(x_1, x) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n x = x_i \right) \wedge (u = x_1) \right).$$

Cette formule $\tau_n(u)$ exprime la propriété que u appartient à une classe d'équivalence de cardinalité n .

$$\sigma_{2n+1} := \forall u \forall v (\tau_n(u) \ \& \ \tau_n(v) \rightarrow E(u, v)).$$

E a une seule classe de cardinalité n .

Montrons que :

T est consistente. Voici 3 preuves de la consistance de T :

(i) Considérons les entiers naturels strictement positifs et définissons $E(x, y)$ ssi $\exists u u \leq x, y < 2u$. Un modèle \mathcal{M} de T est alors : $(\mathbb{N} - \{0\}, E)$.

(ii) Soit Δ une partie finie de T , soit $m \in \omega$ l'indice maximal apparaissant dans les énoncés $\sigma_i, i \in \omega$, appartenant à Δ . Considérons \mathbb{N}^2 et soient $\bar{x}_1 = (x_1, y_1), \bar{x}_2 = (x_2, y_2)$ définissons $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ssi $\bigvee_{j=0}^m y_1 + x_1 = y_2 + x_2 = j \vee (y_1 + x_1 > m \wedge x_2 + y_2 > m)$.

(iii) Considérons des sous-ensembles finis disjoints A_i de cardinalité $i \in \omega - \{0\}$: $|A_i| = i$. Définissons $E(x, y)$ sur l'union disjointe $\bigcup_{i \in \omega - \{0\}} A_i$ de ces sous-ensembles A_i par : $(E(x, y))$ ssi il existe $i \in \omega - \{0\}$ tel que $x, y \in A_i$.

T a l'e.q. On introduit un ensemble $C := \{c_n : n \in \omega - \{0\}\}$ de nouvelles constantes et posons $T_C := T \cup \{\tau_n(c_n) : n \in \omega - \{0\}\}$.

Montrons tout d'abord que T_C a l'e.q. dans L_C .

On applique l'exercice précédent et donc il suffit de montrer que toute \mathcal{L}_C -formule de la forme $\exists x_0 \phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ où $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une \mathcal{L}_C -formule sans quantificateur, est équivalente dans T_C à une \mathcal{L}_C -formule sans quantificateurs.

Posons $\bar{x} := (x_1, \dots, x_n)$. Comme $\exists x_0 (\phi_1(x_0, \bar{x}) \vee \phi_2(x_0, \bar{x}))$ est équivalente à $\exists x_0 \phi_1(x_0, \bar{x}) \vee \exists x_0 \phi_2(x_0, \bar{x})$, on peut supposer que $\phi(x_0, \bar{x})$ est de la forme $\bigwedge_{i \in I} E(x_0, u_i) \wedge \bigwedge_{i \in I'} x_0 = u_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg E(x_0, u_j) \wedge \bigwedge_{j \in J'} x_0 \neq u_j \ \& \ \theta(x_1, \dots, x_n)$, où $I, I', J, J' \subset \{1, \dots, n\}$ et $\theta(x_1, \dots, x_n)$ est une \mathcal{L}_C -formule sans quantificateurs et $u_i \in \{x_i, c_i\}$, $i \in I \cup I'$ et $u_j \in \{x_j, c_j\}$, $j \in J \cup J'$.

Si $I' \neq \emptyset$, disons $i_1 \in I'$,

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi(u_{i_1}, x_1, \dots, x_n).$$

Supposons désormais que $I' = \emptyset$.

Si $I \cap J \neq \emptyset$, alors la formule $\phi(x_0, \bar{x})$ est contradictoire et

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, \bar{x}) \leftrightarrow \neg E(c_1, c_1).$$

Sinon, on suppose tout d'abord que $I = \emptyset$, alors comme la condition sur x_0 peut toujours être remplie puisque pour chaque naturel non nul n , tout modèle de T a une classe d'équivalence de cardinalité n ,

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, \bar{x}) \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_n).$$

Si $I \neq \emptyset$, alors puisque E est une relation transitive, $\phi(x_0, \bar{x})$ est équivalente à $E(x_0, u_{i_0}) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg E(x_0, u_j) \wedge \bigwedge_{j \in J'} x_0 \neq u_j \wedge \theta'(x_1, \dots, x_n)$, où $i_0 \in I$ et $\theta'(x_1, \dots, x_n)$ est une \mathcal{L}_C -formule sans quantificateurs.

Pour chaque sous-ensembles $J''' \subset J'' \subset J'$, on pose $\chi_{J''', J''}((u_j)_{j \in J'})$ la formule sans quantificateurs : $\bigwedge_{j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in J''} u_{j_1} \neq u_{j_2} \wedge \bigwedge_{j' \in J'} \bigvee_{j'' \in J''} u_{j'} = u_{j''} \wedge \bigwedge_{j''' \in J'''} E(u_{j'''}, u_{i_0}) \wedge \bigwedge_{j'' \in J'' - J'''} \neg E(x_{j''}, u_{i_0})$. On a alors l'équivalence suivante :

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, \bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{J''' \subset J'' \subset J'} \left(\bigwedge_{j \in J} \neg E(u_{i_0}, u_j) \wedge \chi_{J''', J''}((u_j)_{j \in J'}) \wedge \bigwedge_{j=1}^{|J'''} \neg E(u_{i_0}, c_j) \wedge \theta'(x_1, \dots, x_n) \right).$$

Comme nous n'avons pas introduit de nouvelles variables libres jusqu'à présent, il reste simplement à montrer qu'un \mathcal{L}_C -énoncé sans quantificateurs est équivalent à une \mathcal{L} -formule sans quantificateurs. Soit $\theta(x_1, \dots, x_m)$ une \mathcal{L} -formule sans quantificateurs et soit $\theta(c_{i_1}, \dots, c_{i_m})$, où $i_1, \dots, i_m \in \omega - \{0\}$ le \mathcal{L}_C -énoncé correspondant. La validité de cet énoncé est déterminée par T_C et donc est équivalente dans tous les modèles de T à soit $E(x_1, x_1)$ soit à $\neg E(x_1, x_1)$.

T est complète. Soit ϕ un énoncé. Comme T a l'e.q., il existe une formule sans quantificateurs $\theta(x_1, \dots, x_n)$ telle que $T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\phi \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_n))$. En

particulier, $T \models \forall x_1 (\phi \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_1))$. Or $\theta(x_1, \dots, x_1)$ est une combinaison booléenne de formules atomiques : $E(x_1, x_1)$, $x_1 = x_1$ qui sont conséquence de T et donc ϕ est soit toujours vraie soit toujours fausse.

T a un modèle qui contient un nombre infini de classes d'équivalences infinies. Écrivons un ensemble d'axiomes qui traduit cette propriété. Soit $T_\infty := T \cup \{\sigma_{n,m} : n, m \in \omega - \{0\}\}$, où $\sigma_{n,m}$ exprime qu'il y a n éléments inéquivalents et que chacun appartiennent à une classe d'équivalence contenant m éléments distincts. On remarque que tout modèle de T est modèle d'une partie finie de T_∞ et donc en appliquant le théorème de compacité, on aura que T_∞ a un modèle. Écrivons $\sigma_{n,m} :=$

$$\exists x_1 \cdots \exists x_{n \cdot m} \bigwedge_{0 \leq i < j < n} \neg E(x_{i \cdot m + 1}, x_{j \cdot m + 1}) \wedge \bigwedge_{i=0}^n \left(\bigwedge_{j=1}^m (E(x_{i \cdot m + 1}, x_{i \cdot m + j}) \wedge \bigwedge_{j'=1, j' \neq j}^m x_{i \cdot m + j} \neq x_{i \cdot m + j'}) \right).$$

7. Montrer que la classe des anneaux commutatifs locaux c.a.d. avec un unique idéal maximal est finiment axiomatisable. (Donner aussi un exemple d'un tel anneau qui n'est pas un corps.)

Lemme : Un anneau A est local ssi l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal de A (qui sera alors l'unique idéal maximal de A).

\Rightarrow : Soit I l'unique idéal maximal de A . Par définition $I \neq A$, donc I ne contient aucun élément inversible de A . Montrons que I contient tous les éléments non inversibles de A , ie que si $x \notin I$, alors x est inversible. Soit donc $x \notin I$. xA est un idéal. -si $xA = A$, alors $\exists y \in A, xy = 1$ donc x est inversible. -si $xA \neq A$, alors (par le Lemme de Zorn), xA est contenu dans un idéal maximal différent de I ce qui contredit l'unicité de I .

\Leftarrow : Si l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal I , celui-ci est maximal et est l'unique idéal maximal car tout idéal J qui le contiendrait strictement contiendrait un élément inversible donc serait égal à A . De même un idéal maximal $J \neq I$ contiendrait un élément inversible. L'anneau A est donc local.

Une axiomatisation de la classe des anneaux commutatifs locaux peut donc être :
-axiomes pour les anneaux unitaires commutatifs, et, en posant $\phi(x) := \forall y (x \cdot y \neq 1)$ pour exprimer la "non-inversibilité" :

-axiomes exprimant que les éléments non-inversibles forment un idéal :

$$\forall x \forall y (\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow \phi(x - y)) \quad (I \text{ est sous-groupe additif de } A)$$

$$\forall x \forall a (\phi(x) \rightarrow \phi(a \cdot x))$$

Cette axiomatisation est finie.

Exemple d'un tel anneau : soit p un nombre premier ; posons $\mathbb{Z}[p] := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } p \text{ ne divise pas } b\}$. C'est un sous-anneau $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$, mais ce n'est pas un corps..., il a un unique idéal maximal : $p \cdot \mathbb{Z}[p]$. Et donc c'est un exemple d'un anneau.

8. Montrez que la classe des groupes abéliens, sans-torsion, divisibles est élémentaire, mais pas finiment axiomatisable.

Notons \mathcal{K} cette classe.

preuve 1 : on considère maintenant le réduit de $\mathbb{Z}[p] := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } p \text{ ne divise pas } b\}$ au langage des groupes abéliens (et donc comme sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$, avec $p \in \mathcal{P}$, où \mathcal{P} est l'ensemble des nombres premiers.

On a que $(\mathbb{Z}[p], +, -, 0)$ est un groupe abélien, sans-torsion mais il n'est pas divisible (car 1 n'est pas divisible par p).

Notons qu'un groupe abélien est divisible ssi il est p -divisible pour chaque $p \in \mathcal{P}$ (justifier).

On considère $(\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}[p]/\mathcal{U}, +, -, 0)$, avec \mathcal{U} un ultrafiltre non principal sur \mathcal{P} . Par le théorème de os, c'est un groupe abélien, sans-torsion et cette fois il est divisible car pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\{q \in \mathcal{P} : \mathbb{Z}[q] \text{ est } p\text{-divisible}\}$ est cofini.

Preuve 2 : Soit Σ l'ensemble d'axiomes pour les groupes défini dans l'exercice 2 (notation multiplicative), et $\varphi := \forall x \forall y (x.y = y.x)$ (groupes abéliens). Soit $n \in \mathbb{N}$, et

$$\phi_n := \underbrace{x.x \dots x}_{n \text{ fois}} = e \text{ et } \psi_n := \underbrace{x.x \dots x}_{n \text{ fois}} = y$$

Soient B et C les ensembles infinis d'axiomes exprimant respectivement le fait qu'un groupe soit "sans-torsion" et "divisible" :

$$B := \{\forall x (x = e \vee \neg \phi_n(x)) : n \geq 2\} \quad C := \{\forall y \exists x \psi_n(x, y) : n \geq 2\}$$

On prend pour ensemble d'axiomes $T := \Sigma \cup \{\varphi\} \cup B \cup C$.

L'ensemble d'axiomes T est infini. On peut montrer qu'on ne peut pas axiomatiser la classe \mathcal{K} par un ensemble fini d'énoncés ; (remarque : on ne peut pas non plus axiomatiser "groupes abéliens sans-torsion" par un ensemble fini d'axiomes (voir cours de C. Michaux), car tout ensemble fini d'énoncés vrai dans tous les groupes sans-torsion est aussi vrai dans un certain groupe de torsion. Le complémentaire dans la classe des groupes abéliens de la classe des groupes abéliens sans-torsion n'est donc pas élémentaire (voir Proposition 6.2.3) mais on peut aussi le montrer directement (exercice 10))

Soit $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ un tel ensemble fini d'énoncés et soit la conjonction $\theta := \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k$. Un modèle \mathcal{M} de $\Sigma \cup B \cup C$ satisfait θ . Par le théorème de compacité, il existe B' (respectivement C') un sous-ensemble fini de B (respectivement de C) tel que tout groupe abélien modèle de $B' \cup C'$ soit un modèle de θ .

Soit $n_0 := \max\{n : \forall x (x = e \vee \neg \phi_n(x)) \in B'\}$; $m_0 := \max\{n : \forall y \exists x \psi_n(x, y) \in C'\}$; $N := \max\{n_0, m_0\}$. Si p premier tel que $p > N$, $(\mathbb{Z}_p, +) \models B' \cup C'$ et donc $(\mathbb{Z}_p, +) \models \theta$, et pourtant $(\mathbb{Z}_p, +)$ n'est pas sans-torsion.

9. Montrez qu'il y a \aleph_0 groupes abéliens, sans-torsion, divisibles dénombrables non-isomorphes.

On remarque que tout groupe abélien, divisible sans torsion peut être muni d'une structure de \mathbb{Q} -espace vectoriel ([6] p.41) (et inversement tout \mathbb{Q} -espace vectoriel est un modèle de T . En effet :

-Si V est un \mathbb{Q} -espace vectoriel, le groupe additif $(V, +, -, 0)$ est abélien, sans-torsion

et divisible.

-Si G est un groupe abélien, sans-torsion et divisible, si $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $h \in G$ tel que $nh = g$. Si $nk = g$, alors $n(h - k) = 0$. Comme G est sans-torsion, il y a un unique $h \in G$ tel que $nh = g$. En appelant cet élément g/n , on peut voir G comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel avec la multiplication par un scalaire : $\frac{m}{n}g = m(g/n)$.

Deux \mathbb{Q} -espaces sont isomorphes ssi ils ont la même dimension, donc deux modèles de T sont déterminés à isomorphisme près par leur dimension. Si G (en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel) est de dimension λ , alors $|G| = \lambda \cdot \aleph_0 = \max\{\lambda, \aleph_0\}$ (*).

Notons que T n'est pas \aleph_0 -catégorique, puisque pour tout $\lambda \in \omega$, $|G| = \aleph_0$. Il y a donc \aleph_0 modèles non-isomorphes, correspondant aux \mathbb{Q} -espaces vectoriels de dimensions respectives $1, 2, \dots$.

Par contre on voit que T est κ -catégorique pour $\kappa > \aleph_0$, puisque, d'après (*), lorsque G est de cardinalité κ , G est de dimension $\lambda = \kappa$.

Montrons (*) pour $\lambda \geq \aleph_0$.

Soit G un \mathbb{Q} -espace vectoriel et B une base de G de cardinalité λ : $B = (b_\alpha)_{\alpha < \lambda}$. Un élément $g \in G$ s'écrit : $g = \sum_{\alpha_i \in \lambda, i \in I} b_{\alpha_i} q_i$, I fini, $q_i \in \mathbb{Q}$, $b_{\alpha_i} \in B$. Considérons $\tilde{B} := \{b \cdot q : b \in B, q \in \mathbb{Q}\} \cong B \times \mathbb{Q}$. G s'injecte dans $\bigcup_n \tilde{B}^n$ par la fonction : $g \mapsto (b_{\alpha_1} q_1, \dots, b_{\alpha_n} q_n)$; donc $|G| \leq \left| \bigcup_n \tilde{B}^n \right|$.

On sait aussi que $|\tilde{B}| = |B \times \mathbb{Q}| = |B| = \lambda$ (règles de calcul sur les cardinaux infinis et car on a supposé $\lambda \geq \aleph_0$); et que $\left| \bigcup_n \tilde{B}^n \right| \leq |\tilde{B}|$ (voir Annexe B).

On a alors $|B| \leq |G| \leq \left| \bigcup_n \tilde{B}^n \right| \leq |\tilde{B}| = |B| = \lambda = \dim G$.

10. Montrez que la classe des groupes abéliens de torsion n'est pas élémentaire.

Voir le corollaire dans l'exercice 8. On peut aussi le montrer directement en utilisant le lemme suivant, dont une conséquence sera que tout énoncé vrai dans tous les groupes abéliens de torsion est aussi vrai dans un groupe qui n'est pas de torsion.

Lemme : (voir cours de C. Michaux). Si A est un ensemble d'énoncés (du premier ordre) vrai dans chaque groupe $(\mathbb{Z}_p, +)$, alors il y a un groupe $(G, +, 0)$ qui contient un élément g d'ordre infini et qui est un modèle de A .

Preuve du lemme : On enrichit \mathcal{L} des symboles $+, 0$ et d'un nouveau symbole de constante c . Soit T_n l'ensemble d'axiomes :

$$T_n := \begin{cases} \text{axiomes pour les groupes abéliens} \\ A \\ c \neq 0 \\ c + c \neq 0 \\ \vdots \\ \underbrace{c + c + \dots + c}_{n \text{ fois}} \neq 0 \end{cases}$$

On pose $T := \bigcup_{n \in \omega} T_n$.

Pour chaque n , T_n a un modèle $(\mathbb{Z}_p, +, 0, 1)$, $p > n$, p premier, car l'ordre de 1 dans $(\mathbb{Z}_p, +)$ est p . Par le théorème de compacité, T a un modèle $(G, +, 0, g)$, où g est l'interprétation du symbole de constante c . Et donc G est un groupe abélien avec un élément g d'ordre infini.

11. Soit $(G, +, <, 0)$ un groupe abélien totalement ordonné; G est archimédien si pour tout x, y dans G , tels que $0 < x < y$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y < m.x$. Montrez que la classe des groupes archimédiens n'est pas élémentaire.

$\mathbb{R}^\omega/\mathcal{U}$, \mathcal{U} ultrafiltre non principal, n'est pas archimédien. (Considérer $0 < x = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor < y = 1$. On a que pour tout naturel m différent de 0, $m \cdot \lfloor \frac{1}{n} \rfloor < 1$ car $\{n \in \omega : \frac{m}{n} < 1\} = \{n \in \omega : n \geq m + 1\}$ et donc inclus dans tout ultrafiltre non principal.)

12. Montrer que $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +, 0)$ n'est pas élémentairement équivalent à $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Considerer les cardinalités des quotients $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ou de façon équivalente l'indice de $2G$ dans G pour G un groupe abélien).

On écrit l'énoncé suivant $\exists u (u \neq 0 \& \forall x \exists y (x = y + y \text{ ou } x = y + y + u))$ et on montre qu'il est vrai dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

13. Trouver deux ordres totaux denses sans extrémités non-isomorphes mais de même cardinalité.

Rappel : cette théorie (notons la DLO) est \aleph_0 -catégorique mais pas \aleph_1 -catégorique. Soient $\mathcal{M}_1 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, <)$ et $\mathcal{M}_2 := (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, <)$, avec $<$ l'ordre lexicographique : $(a, b) < (c, d)$ ssi $a < c$ ou $(a = c \text{ et } b < d)$. \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux modèles de DLO, ayant même cardinalité \aleph_1 .

Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$. Cet isomorphisme respecte l'ordre et donc vérifie $f(0, 0) < f(1, 0)$. Supposons que $f(0, 0)$ et $f(1, 0)$ soient dans deux "copies" différentes de \mathbb{R} , i.e. respectivement dans $\{i\} \times \mathbb{R}$ et $\{j\} \times \mathbb{R}$, $i < j$. On peut supposer sans perte de généralité que $f(0, 0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$, par exemple $f(0, 0) = (0, 0)$, et que $f(1, 0) \in \{n\} \times \mathbb{R}$, par exemple $f(1, 0) = (n, 0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Comme entre $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{1\} \times \mathbb{R}$ on a une infinité de copies de \mathbb{R} (dans \mathcal{M}_1) mais que dans \mathcal{M}_2 entre $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{n\} \times \mathbb{R}$ on n'a qu'un nombre fini de copies de \mathbb{R} , par le principe des tiroirs il existe $0 \leq q_1 < q_2 \leq 1$ tels que $f(q_1, 0)$ et $f(q_2, 0)$ appartiennent à la même copie, disons $\{m\} \times \mathbb{R}$, $0 \leq m \leq n$. Comme f respecte l'ordre, on doit avoir $(m, r) := \sup f(q_1, \mathbb{R}^+) < f(q_2, 0)$, et pour tous $x \in \mathbb{R}$, $(q_1, x) < f^{-1}(m, r) \leq (q_2, 0)$. Or dans \mathcal{M}_1 , il y a des éléments strictement plus grands que ceux de $\{q_1\} \times \mathbb{R}$ et strictement plus petits que $f^{-1}(m, r)$; contradiction.

14. Soient T_1 et T_2 deux \mathcal{L} -théories telles que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Alors il existe un énoncé θ tel que $T_1 \models \theta$ et $T_2 \models \neg\theta$.

Par le théorème de compacité, il existe un sous-ensemble fini $\Sigma \subset T_1 \cup T_2$ qui n'est pas satisfaisable. Comme T_1 et T_2 sont consistentes, Σ n'est ni inclus à T_1 , ni à T_2 . Supposons que $\Sigma \cap T_1 \neq \emptyset$, posons $\theta := \bigwedge_{\sigma \in \Sigma \cap T_1} \sigma$. On a que $T_1 \models \theta$.

Montrons que $T_2 \models \neg\theta$. Sinon, il existerait $\mathcal{M} \models T_2$ et $\mathcal{M} \models \theta$. Mais $\Sigma \subset T_2 \cup \Sigma \cap T_1$ et donc Σ aurait un modèle, contradiction.

15. Soient T_1 et T_2 deux \mathcal{L} -théories telles que pour toute \mathcal{L} -structure \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models T_1$ ssi $\mathcal{A} \not\models T_2$. Montrez que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Rappel : T est finiment axiomatisable si il existe un \mathcal{L} -énoncé σ tel que la classe des modèles de T coïncide avec celle de σ .

On peut utiliser l'exercice précédent, car on voit ici que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Il existe alors un \mathcal{L} -énoncé θ tel que $T_1 \models \theta$ et $T_2 \models \neg\theta$.

Montrons que $\mathcal{A} \in \text{Mod}(T_1) \leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Mod}(\theta)$.

(\rightarrow) : $\mathcal{A} \in \text{Mod}(T_1) \rightarrow \mathcal{A} \in \text{Mod}(\theta)$ car θ est une conséquence logique de T_1 .

(\leftarrow) : on utilise " $\mathcal{A} \notin \text{Mod}(\neg\theta) \rightarrow \mathcal{A} \notin \text{Mod}(T_2)$ ", qui est la contraposée du fait que $\neg\theta$ soit une conséquence logique de T_2 . Cela donne : $\mathcal{A} \in \text{Mod}(\theta) \rightarrow \mathcal{A} \notin \text{Mod}(\neg\theta) \rightarrow \mathcal{A} \notin \text{Mod}(T_2) \rightarrow \mathcal{A} \in \text{Mod}(T_1)$. Donc $\mathcal{A} \in \text{Mod}(T_1) \leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Mod}(\theta)$. De meme pour T_2 et $\neg\theta$.

C.4 Section 8.3.

1. Soit \mathcal{C} une classe de \mathcal{L} -structures qui est inductive c.a.d. fermée par unions de chaines. Soit \mathcal{C}^{ec} la classe des structures de \mathcal{C} qui sont existentiellement closes dans \mathcal{C} . Montrez que \mathcal{C}^{ec} est non vide et que cette classe est fermée par unions de chaines.

i) On procède comme dans la première partie de la preuve du critère de Lindström. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. On trouve tout d'abord une extension $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}$ de \mathcal{A} , où toute formule existentielle à paramètres dans \mathcal{A} vraie dans un élément de \mathcal{C} contenant \mathcal{A} est vraie. Ensuite remplaçant dans la construction \mathcal{A} par \mathcal{A}_1 , on itère ω fois. Soit $\mathcal{A}^* := \bigcup \mathcal{A}_n$, où $\mathcal{A}_n \in \mathcal{C}$, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \omega$ et toute formule existentielle à paramètres dans \mathcal{A}_n vraie dans un élément de \mathcal{C} contenant \mathcal{A}_n est vraie dans \mathcal{A}_{n+1} . Il est aisé de vérifier que $\mathcal{A}^* \in \mathcal{C}^{ec}$.

Construisons $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}$. On énumère les formules existentielles de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ (il n'y en a pas plus que $\max\{|\mathcal{A}|, \aleph_0\}$). Soit $(\phi_\alpha)_{\alpha < \mu}$ une telle énumération. Posons $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$; par induction sur $\beta < \mu$ on suppose que pour chaque formule ϕ_α où $\alpha < \beta$ l'on a un élément \mathcal{A}_α de \mathcal{C} contenant \mathcal{A} tel que si ϕ_α est vrai dans une extension de \mathcal{A}_α appartenant à \mathcal{C} , alors ϕ_α est vraie dans \mathcal{A}_α . De plus on suppose que si $\gamma_1 < \gamma_2 < \beta$, alors $\mathcal{A}_{\gamma_1} \subset \mathcal{A}_{\gamma_2}$.

On considère alors ϕ_β et la structure $\bigcup_{\gamma < \beta} \mathcal{A}_\gamma$ qui appartient à \mathcal{C} par hypothèse.

Si ϕ_β est vraie dans une extension $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$ de $\bigcup_{\gamma < \beta} \mathcal{A}_\gamma$, alors on pose $\mathcal{A}_\beta = \mathcal{D}$, sinon on pose $\mathcal{D} := \bigcup_{\gamma < \beta} \mathcal{A}_\gamma$. On a bien que pour tout $\delta \leq \beta$, si ϕ_δ est vraie dans une extension de \mathcal{A}_β , alors elle est déjà vraie dans \mathcal{A}_β .

ii) Soit $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une chaîne de \mathcal{C}^{ec} . Montrons que $\bigcup \mathcal{M}_i \in \mathcal{C}^{ec}$. Soit donc $\bar{a} \subseteq \bigcup M_i$, ϕ une formule sans quantificateurs, et $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$ telle que $\bigcup \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$. Il existe i tel que $\bar{a} \subseteq M_i$ et \mathcal{M}_i est existentiellement close par hypothèse, donc $\mathcal{M}_i \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$, et donc $\bigcup \mathcal{M}_i \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$.

2. Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre et T une théorie qui a une axiomatisation $\forall \exists$. Soit $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ deux \mathcal{L} -structures avec \mathcal{B} un modèle de T . Montrez que \mathcal{A} est un modèle de T et que si \mathcal{B} est existentiellement clos dans la classe des modèles de T , alors \mathcal{A} l'est également.

Remarque : Une théorie consistante T a une axiomatisation $\forall \exists$ si on peut trouver un ensemble Σ d'énoncés de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_m \exists y_1 \dots \exists y_n$ pour $m, n \geq 0$ tel que : $\Sigma \models T$.

Soit donc Σ un tel ensemble d'énoncés, et $\sigma \in \Sigma$. σ est de la forme $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \theta(\bar{x}, \bar{y})$. Montrons que $\mathcal{A} \models \sigma$. Soit $\bar{a} \subseteq A$. $\mathcal{B} \models \sigma$ et $\bar{a} \subseteq A \subseteq B$, donc $\mathcal{B} \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})$. $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$, donc $\mathcal{A} \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})$, i.e. $\mathcal{A} \models \sigma$. \mathcal{A} est donc un modèle de T .

Supposons maintenant que \mathcal{B} soit existentiellement clos dans la classe des modèles de T .

Soit \mathcal{C} un modèle de T tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. On va utiliser le théorème 7.13 d'amalgamation existentielle. Soit \bar{a} un uple infini énumérant A . Comme $A \subseteq \mathcal{C}$, sans perte de généralité on peut supposer que le plongement f de $\langle \bar{a} \rangle$ dans \mathcal{C} est l'identité. Dire que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \Rightarrow_1 (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$ est alors équivalent à la propriété que toute formule existentielle à paramètres dans A , vraie dans \mathcal{B} est vraie dans \mathcal{C} (ce qui est bien le cas car $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ et la formule est existentielle et donc dès qu'elle est vraie dans \mathcal{A} elle est vraie dans \mathcal{C}).

Il existe donc \mathcal{D} et un plongement de \mathcal{C} dans \mathcal{D} qui est l'identité sur A et tel que $\mathcal{B} \prec \mathcal{D}$.

Montrons que $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{C}$. Soit ϕ une formule existentielle à paramètres dans A et vraie dans \mathcal{C} . Comme \mathcal{C} se plonge dans \mathcal{D} , cette formule est aussi satisfaite par \mathcal{D} et comme $\mathcal{B} \prec \mathcal{D}$, elle est vraie dans \mathcal{B} . Or $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$, et donc elle est vraie dans \mathcal{A} , ce qu'il fallait montrer.

3. Soit T la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion dans le langage $\mathcal{L} := \{+, -, 0\}$. Axiomatisez cette théorie. Montrez qu'elle est modèle-complète.

On peut utiliser le critère de Lindström car T n'a pas de modèles finis et est \aleph_1 -catégorique (voir exercice 9 chapitre 6.4). Montrons que T est aussi fermée par union de chaînes : soit $(\mathcal{A}_i, i \in I)$ une chaîne infinie de \mathcal{L} -structures modèles de T . Considérons $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ et $\sigma \in T$. Notons que σ est un énoncé de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \theta(\bar{x}, \bar{y})$, où θ est une formule sans quantificateurs. Prenons des éléments $a_1, \dots, a_n \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, il existe donc $i_0 \in I$ tel que $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}_{i_0}$. Or $\mathcal{A}_{i_0} \models \sigma$ et donc il existe $b_1, \dots, b_m \in \mathcal{A}_{i_0}$ tels que $\mathcal{A}_{i_0} \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$. Mais \mathcal{A}_{i_0} est une sous-structure de $\bigcup \mathcal{A}_i$ et donc $\bigcup \mathcal{A}_i \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$ car la formule θ est sans quantificateurs.

4. Soit p est un nombre premier, un p -groupe est un groupe où l'ordre de tout élément est une puissance de p . Y-a-t-il des p -groupes abéliens divisibles ? Justifiez votre réponse.

Le groupe trivial $G = \{e\}$ est un p -groupe pour tout p car tout élément y est d'ordre p^0 . De plus il vérifie la série infinie d'axiomes (définie dans l'exercice 8 du chapitre 6.4) exprimant la divisibilité.

Supposons maintenant que G est un groupe abélien non-trivial et notons le multiplicativement. Pour qu'un groupe soit divisible il suffit que pour tout nombre premier q , et pour tout élément g de G il existe $y \in G$ tel que $y^q = g$. Si G est un p -groupe, alors il est nécessairement q -divisible pour tout nombre premier $q \neq p$. (En effet par le théorème de Bezout, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $p^n \cdot z_1 + q \cdot z_2 = 1$. Donc si $g^{p^n} = 1$, on a que $g = g^{p^n \cdot z_1} \cdot g^{q \cdot z_2}$ et donc $g = (g^{z_2})^q$.) Notons par μ_{p^n} le sous-groupe de \mathbb{C}^* de (toutes) les racines p^n ièmes de l'unité ; c'est un p -groupe abélien. On plonge μ_{p^n} dans $\mu_{p^{n+1}}$; montrons que l'image de ce plongement est égal à $\{y^p : y \in \mu_{p^{n+1}}\}$. Tout élément de $\mu_{p^{n+1}}$ de la forme y^p appartient à cette image et par ailleurs si $y_1^p = y_2^p$, alors $(y_1 \cdot y_2^{-1})^p = 1$. Or il y a p racine p ièmes de l'unité dans $\mu_{p^{n+1}}$.

Considérons l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_{p^n}$. C'est un sous-groupe de \mathbb{C}^* qui est un p -groupe abélien. Pour montrer qu'il est divisible, par la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que chaque élément $g \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_{p^n}$ est égal à y^p pour un certain $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_{p^n}$. Mais il existe n tel que $g \in \mu_{p^n}$. On plonge μ_{p^n} dans $\mu_{p^{n+1}}$ et donc $g = y^p$ pour un certain $y \in \mu_{p^{n+1}}$.

5. Soit \mathcal{L} un langage dénombrable (fini ou infini). Rappelons la définition suivante. Soient T et T' deux \mathcal{L} -théories consistentes. On dit que T' est une *modèle-compagne* de T si T' est modèle-complète, si tout modèle de T se plonge dans un modèle de T' et tout modèle de T' se plonge dans un modèle de T .
- (i) Montrer que si T_1 et T_2 sont deux modèle-compagnes de T , alors T_1 et T_2 ont les mêmes modèles.
- (ii) Soit T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$, montrer que si T a une modèle-compagne T' , alors T' est la théorie de la classe des modèles existentiellement clos de T .

(i) Soit \mathcal{A}_1 un modèle de T_1 : \mathcal{A}_1 se plonge dans un modèle de T qui lui-même se plonge dans un modèle \mathcal{A}_2 de T_2 . De la même façon, \mathcal{A}_2 se plonge dans un modèle de T qui lui-même se plonge dans un modèle \mathcal{B}_1 de T_1 . Comme T_1 est modèle-complète, $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$. On va montrer que $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2$, où \mathcal{A}_1 varie dans la classe des modèles de T_1 , et \mathcal{A}_2 varie dans la classe des modèles de T_2 . on procède par induction sur la complexité n (nombre de quantificateurs) d'une \mathcal{L} -formule $\theta(\bar{x})$.

$n = 0$: pour tout uple $\bar{a} \subseteq A_1$, $\mathcal{A}_1 \models \theta(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A}_2 \models \theta(\bar{a})$, car $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq B_1$ et $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$, pour un certain modèle \mathcal{B}_1 de T_1 .

$n \geq 1$: soit $\xi(\bar{x}) := \exists y \psi(y, \bar{x})$, où ψ est de complexité $\leq n$. Soit $\bar{a} \subseteq A_1$. Montrons que $\mathcal{A}_1 \models \xi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A}_2 \models \xi(\bar{a})$.

(\rightarrow) : Si $\mathcal{A}_1 \models \exists y\psi(y, \bar{a})$, alors $\mathcal{A}_1 \models \psi(c, \bar{a})$ pour un $c \in A_1$. Cela est équivalent à $\mathcal{A}_2 \models \psi(c, \bar{a})$ par hypothèse d'induction, et donc implique $\mathcal{A}_2 \models \exists y\psi(y, \bar{a})$.

(\leftarrow) : Si $\mathcal{A}_2 \models \exists y\psi(y, \bar{a})$, alors $\mathcal{A}_2 \models \psi(d, \bar{a})$ pour un $d \in A_2$. Cela est équivalent à $\mathcal{B}_2 \models \psi(d, \bar{a})$, pour un certain modèle \mathcal{B}_2 de T_2 tel que, pour un modèle \mathcal{B}_1 de T_1 , $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, $\mathcal{A}_2 \prec \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$.

Par hypothèse d'induction, $\mathcal{B}_2 \models \psi(d, \bar{a})$ implique $\mathcal{B}_1 \models \psi(d, \bar{a})$, i.e. $\mathcal{B}_1 \models \exists y\psi(y, \bar{a})$.

Par le test de Tarski-Vaught et car $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$, on a : $\mathcal{A}_1 \models \exists y\psi(y, \bar{a})$.

(ii) Il suffit de montrer que les modèles de T' sont des modèles de T . Soit \mathcal{A}' un modèle de T' . \mathcal{A}' se plonge dans un modèle \mathcal{A} de T , qui lui-même se plonge dans un modèle \mathcal{B}' de T' . Par le théorème 8.1.1 et car T' est modèle-complète, on a : $\mathcal{A}' \subset_{ec} \mathcal{B}'$, et donc en particulier $\mathcal{A}' \subset_{ec} \mathcal{A}$. Par l'exercice 2, \mathcal{A}' est un modèle de T .

6. Montrer que si une \mathcal{L} -théorie T_0 est modèle-complète et si étant donnés deux modèles quelconques \mathcal{A}, \mathcal{B} de T_0 , il existe un troisième modèle \mathcal{C} de T_0 tel que \mathcal{A} et \mathcal{B} se plongent dans \mathcal{C} , alors T_0 est complète.

Soit ϕ une \mathcal{L} -formule, on veut montrer que $T_0 \models \phi$ ou $T_0 \models \neg\phi$. Si $T_0 \not\models \phi$, il y a un modèle \mathcal{A} de T_0 tel que $\mathcal{A} \models \neg\phi$. Supposons qu'il y ait un autre modèle \mathcal{B} de T_0 tel que $\mathcal{B} \models \phi$. Or \mathcal{A} et \mathcal{B} se plongent dans \mathcal{C} et T_0 est modèle complète donc $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ (car $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$). On devrait donc avoir $\mathcal{C} \models \phi$ et $\mathcal{C} \models \neg\phi$, ce qui est une contradiction, donc $\mathcal{B} \models \neg\phi$, i.e. $T_0 \models \neg\phi$.

Dans les références citées ci-dessous, se trouvent de nombreux exercices.

Bibliographie

- [1] Chang, C. C., Keisler, H. J., Model theory, (Third edition), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990 (1977, 1973).
- [2] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] Jacobson, N., Basic Algebra 1 (second edition), W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1985 (réédité dans la collection *Dover*).
- [4] Jacobson, N., Basic Algebra 2 (second edition), W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1985 (réédité dans la collection *Dover*).
- [5] Krivine, J.-L., Théorie axiomatique des ensembles, collection PUF, 1969 (ou réédition en 1972).
- [6] Marker, D., Model theory. An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [7] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]
- [8] Prestel A., Model theory for the real algebraic geometer, Pisa Istituti editoriali e poligrafici internazionale, 1998.
- [9] Tent, K., Ziegler, M., A course in model theory, Lecture Notes in Logic, 40, Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.