



Concours externe du Capes et Cafep-Capes

Section Mathématiques

Exemples de sujets (Épreuves d'admissibilité et d'admission)

À compter de la session 2014, les épreuves du concours sont modifiées. L'arrêté du 19 avril 2013, publié au journal officiel du 27 avril 2013, fixe les modalités d'organisation du concours et décrit le nouveau schéma des épreuves.

CAPES externe de Mathématiques

Sujets « zéro »

Épreuves définies par l'arrêté du 19 avril 2013, fixant les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré – NOR : MENH1310120A

Épreuves écrites d'admissibilité

Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes préparatoires aux grandes écoles (MPSI, MP, ECS 1^{re} et 2^e années).

Première épreuve d'admissibilité.

L'épreuve, qui consiste en la résolution d'un ou plusieurs problèmes, permet d'apprécier la maîtrise des notions mathématiques.

Des exemples de problèmes sont proposés en page 3.

Deuxième épreuve d'admissibilité.

L'épreuve, qui consiste en la résolution de plusieurs problèmes, permet d'apprécier, outre la maîtrise scientifique du candidat, son aptitude à se placer dans une optique professionnelle.

Certaines questions peuvent conduire à mettre en perspective des notions au programme de l'enseignement secondaire.

Plusieurs problèmes posés lors des dernières sessions, complétés par des questions à visée pédagogique, s'inscrivent dans l'esprit de cette épreuve.

Des exemples sont proposés en page 7.

Épreuves d'admission

Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur.

Pendant la préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

Les épreuves visent à évaluer les capacités scientifiques et les aptitudes professionnelles des candidats. À travers l'élaboration d'un plan, la mise au point d'un développement, l'analyse de productions d'élèves ou l'étude de documents ressources, le candidat se trouve dans une situation voisine de celle de l'enseignant en train de préparer un cours.

Épreuve de mise en situation professionnelle

Le candidat choisit un sujet parmi deux qu'il tire au sort.

Pendant vingt minutes, le candidat expose un plan d'étude détaillée du sujet qu'il a choisi. Cet exposé est suivi du développement par le candidat d'une partie du plan choisie par le jury, visant à attester de la maîtrise du sujet traité et de la bonne compréhension des éléments exposés dans le plan, à travers la démonstration d'un théorème, la résolution d'un exercice, la mise en œuvre d'un logiciel, etc.

L'entretien portant sur ce développement ou sur tout autre aspect en lien avec le sujet choisi, est un moment interactif, qui permet au candidat de valoriser ses connaissances en prenant du recul par rapport au thème abordé.

Un plan de qualité se caractérise par sa cohérence d'ensemble, la richesse des contenus (notamment la présence d'exemples ou contre-exemples et d'applications) ainsi qu'une bonne articulation entre eux.

Un effort de synthèse est indispensable, plus particulièrement pour les nombreux sujets de nature transversale, pouvant couvrir plusieurs domaines des programmes ou plusieurs niveaux de classe.

L'aisance dans la communication est un élément primordial pour l'ensemble des épreuves orales.

En premier lieu, la capacité à écouter et à comprendre les questions posées par le jury est essentielle.

De plus, il convient d'utiliser clairement le tableau, de s'exprimer avec conviction et de manière intelligible dans une langue correcte, en adoptant une posture ouverte laissant présager de relations constructives avec une classe.

La liste des sujets qui pourraient être proposés en 2014 est disponible en page 11.

Épreuve sur dossier.

L'épreuve prend appui sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par un exercice qui peut être complété par des productions d'élèves, des extraits des programmes officiels, des documents ressources ou des manuels.

Pendant trente minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier, qui visent à apprécier ses qualités pédagogiques et sa réflexion didactique. Elles concernent l'énoncé de l'exercice, les compétences que celui-ci mobilise, les démarches possibles, les méthodes de résolution ou les éléments d'évaluation. Le candidat doit également proposer des exercices s'inscrivant dans le thème du dossier et visant les objectifs précisés par le jury.

L'entretien prend appui sur la présentation faite par le candidat, en particulier sur les exercices qu'il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que leur intégration dans une séquence pédagogique.

L'analyse de productions d'élèves, d'extraits des programmes officiels ou des compétences visées par un énoncé, amène à porter un regard pédagogique conforme aux exigences du métier d'enseignant. En particulier, les candidats doivent détecter les aspects positifs des démarches et raisonnements d'élèves. Un professeur doit en effet savoir repérer et corriger les erreurs, mais aussi valoriser les connaissances et compétences mises en œuvre.

La capacité à corriger un exercice comme on le ferait en situation d'enseignement oblige à anticiper sur certaines difficultés prévisibles.

Le choix d'exercices sur un thème donné impose de s'interroger sur les critères retenus en fonction d'objectifs donnés. Il s'agit de les présenter de façon vivante, de motiver des choix pédagogiques en explicitant les compétences que l'on souhaite développer et de prévoir d'éventuels aménagements de leur contenu.

Comme pour l'ensemble des épreuves, il est attendu un effort, particulier de clarté et d'explication, tel que devraient en bénéficier des élèves.

Plusieurs exemples de dossiers sont présentés à partir de la page 14.

Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Notations :

- * Pour un ensemble fini F , on note $\text{card}(F)$ son cardinal.
- * Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, on note \mathcal{I}_n l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et \mathcal{N}_n l'ensemble des éléments non inversibles.
- * Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, " a divise b " est noté $a|b$, ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{Z}, b = ka$.
- * Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, le plus grand commun diviseur dans \mathbb{N} de a et b est noté $a \wedge b$.
- * Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par \bar{a} la classe de a dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Rappels : on considère $(G, .)$ un groupe fini d'élément neutre 1_G .

- * Soit $a \in G$. On appelle ordre de a , que l'on note $\omega(a)$, le plus petit élément de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* / a^k = 1_G\}$.
On a alors : $0 < \omega(a) \leq \text{card}(G)$ et $a^{\omega(a)} = 1_G$.
- * Le groupe G est cyclique si et seulement si il existe $a \in G$ tel que $\text{card}(G) = \omega(a)$.

Éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Démontrer que \bar{a} est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Montrer que (\mathcal{I}_n, \times) est un groupe commutatif.
3. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de \mathcal{I}_{10} avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est-il cyclique ?
4. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de \mathcal{I}_{12} avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ est-il cyclique ?
5. Pour les algorithmes demandés, on utilisera uniquement les opérations $\times, +, \wedge$ et la fonction de deux variables **reste** où **reste(a,b)** donne le reste de la division euclidienne de a par b pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

On pourra également utiliser des boucles de type

- **for**
- **while**
- et la construction **if...then...else...**

On précisera le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé.

- 5.1. Écrire une procédure **Test**(,) ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant "1" si $\bar{k} \in \mathcal{I}_n$ et "0" sinon.
- 5.2. Écrire une procédure **Card**() ayant comme argument un entier n avec $n > 1$ affichant le cardinal de \mathcal{I}_n .
- 5.3. Écrire une procédure **Ord**(,) ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant la valeur de $\omega(\bar{k})$, l'ordre de \bar{k} dans (\mathcal{I}_n, \times) , si $\bar{k} \in \mathcal{I}_n$ et "Erreur" sinon.

Éléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n est primaire lorsqu'il existe un nombre premier p et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p^\alpha$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et n ne soit pas primaire.

6.1. Établir qu'il existe deux entiers, que l'on notera n_1 et n_2 , tels que $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.

On pourra utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers de n .

6.2. Montrer alors que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

6.3. Établir également que : $\overline{n_1} \notin \mathcal{I}_n$ et $\overline{n_2} \notin \mathcal{I}_n$

7. On considère p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Prouver que : $\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha} \iff p|k$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$.

Démontrer que \mathcal{N}_n est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si n est primaire.

Puissances de matrices

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q , $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes.

L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

On identifiera par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et \mathbb{C}^p .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n , on note $A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i, j) tel que $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, la suite $(a_{i,j}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{C} .

En posant $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{i,j}(n)) = l_{i,j}$ et $L = (l_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n , on note A^n la puissance n -ième de la matrice A .

Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie A : étude d'un exemple

On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

Dans cette partie, on pose $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A^n et de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A puisse s'écrire :

$$A = PDP^{-1}$$

où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de A^n en fonction de n .
4. Etablir que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

5. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0 .

Partie B : résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M .
 - 1.1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n + B_n) = L + M$.
 - 1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha A_n) = \alpha L$.
 - 1.3. Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n B = \alpha B$.
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L .
 - 2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n X = LX$.
 - 2.2. Énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite.
3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^p, \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n X = 0$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de \mathbb{C}^p représenté par la matrice A dans la base canonique.

On définit, pour tout entier naturel n , u^n par : $u^0 = \text{Id}_{\mathbb{C}^p}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.

On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($\lambda \in \mathbb{C}$).
 - 1.1. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
 - 1.2. On suppose que $|\lambda| = 1$.
Montrer qu'alors $\lambda = 1$. On pourra considérer $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$.
2. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.

Partie D : condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u , où \det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = \det(A - XI_p) = \prod_{i=1}^p (\alpha_i - X)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base (e_1, \dots, e_p) une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots \\ & \alpha_2 & \dots & \dots \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
 - 4.1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_1) = 0$.

- 4.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_i) = 0$.
- 4.3. En déduire la limite de T^n , puis celle de A^n .
5. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de u , deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq m$.
On suppose également que $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.
- 5.1. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \text{Id})$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{C}^p stables par u .
- 5.2. On note u_1 l'endomorphisme de $\text{Im}(u - \text{Id})$ induit par u . Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u , distincte de λ_1 .
- 5.3. En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Partie E : conclusion et application

1. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de A , deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si :
- $$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, |\lambda_i| < 1 \\ \text{ou} \\ \lambda_1 = 1, \text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 2, m \rrbracket, |\lambda_i| < 1 \end{cases}$$
2. Déterminer si la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, dans chacun des cas suivants :

2.1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 + \frac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Deuxième épreuve d'admissibilité. Exemples de problèmes

Construction de triangles

Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C et un point M n'appartenant pas à la droite (BC) .

1. Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point M qui la vérifie.
On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.
 - 1.1. M est le centre de gravité du triangle ABC .
 - 1.2. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
 - 1.3. M est l'orthocentre du triangle ABC .
 - 1.4. M est le centre du cercle inscrit au triangle ABC .
2. Quel type de raisonnement a été utilisé dans les questions précédentes? Donner un autre exemple de problème pouvant être résolu à l'aide de cette méthode.

Quelques nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux. Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à \mathbb{Q} .

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si \sqrt{n} n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors \sqrt{p} est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. Préciser le(s) type(s) de raisonnement utilisé(s) dans les questions 1, 2 et 3. Donner des exemples de mise en oeuvre de tels raisonnements au niveau collège.
5. On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q , entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

- 5.1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :

$$u_q < e < v_q$$

- 5.2. Conclure en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b , entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \frac{a}{b}$.

Étant donné un entier naturel non nul n et un réel x , on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

Étant donné un entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx$$

1.

1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1} .

1.2. Calculer $\sup_{x \in [0, \pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a , b et n .

1.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$$

1.4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n > 0$$

1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.

En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

2.1. $0 \leq k \leq n - 1$

2.2. $n \leq k \leq 2n$

2.3. $k \geq 2n + 1$

Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n , I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$.

Statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes, choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la "vraie position" et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et (x_1, \dots, x_n) , un n -uplet de réels. On définit sur \mathbb{R} les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

1. Minimisation de G

- 1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur \mathbb{R} et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
- 1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?
- 1.3. On se place dans \mathbb{R}^n , espace affine euclidien muni du produit scalaire usuel. Comment peut-on interpréter la fonction G en terme de distance euclidienne ? Comment peut-on alors retrouver le résultat de la question 1.1. ?

2. Minimisation de L

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

- 2.1. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur \mathbb{R} et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
On distinguera les cas n pair et n impair.
- 2.2. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2.1 ?

3. Dans les deux premières questions, on a déterminé les variations d'une fonction d'une variable réelle.

- 3.1. Donner la définition d'une fonction croissante sur \mathbb{R} au niveau lycée.
- 3.2. Donner plusieurs méthodes permettant de déterminer les variations d'une fonction au niveau lycée.

Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret

La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Étant donné un entier naturel non nul n , on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ de probabilités respectives (p_1, \dots, p_n) toutes non nulles.

On définit l'**entropie** de ce système par le nombre :

$$H(A) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

1. Deux exemples

On se place ici dans le cas $n = 4$. Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'événement : *Le cheval numéro i remporte la course.* Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

$$1.1. p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

$$1.2. p_1 = \frac{1}{8}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{2}$$

On va à présent établir la propriété générale suivante :

l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

2. Cas $n = 2$

On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$.

On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$.

Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements A_1 et A_2 sont équiprobables.

3. Cas général

3.1. Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I . On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On considère une fonction f convexe sur I , $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

Démontrer que :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

On pourra procéder par récurrence sur n , en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k \right)$$

3.2. On admet le théorème suivant :

si f est deux fois dérivable sur I , f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .

Démontrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0, 1[$.

3.3. Démontrer que $H(A) \leq \ln n$. Conclure.

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.

La capacité du candidat à illustrer le sujet par des exemples sera valorisée.

1. Résolution de problèmes à l'aide de graphes.
2. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
3. Variables aléatoires discrètes.
4. Loi binomiale.
5. Loi de Poisson, loi normale.
6. Variables aléatoires réelles à densité.
7. Lois uniformes, lois exponentielles.
8. Lois normales.
9. Marches aléatoires.
10. Séries statistiques à une variable.
11. Séries statistiques à deux variables numériques.
12. Intervalles de fluctuation.
13. Estimation.
14. Multiples, diviseurs, division euclidienne.
15. PGCD, égalité de Bézout.
16. Nombres premiers, décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
17. Congruences dans \mathbb{Z} .
18. Équations du second degré à coefficients réels ou complexes.
19. Module et argument d'un nombre complexe.
20. Exemples d'utilisation des nombres complexes.
21. Calcul vectoriel.
22. Exemples d'utilisation d'un repère.
23. Résolution de problèmes à l'aide de matrices.
24. Proportionnalité et linéarité.
25. Pourcentages.
26. Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations.
27. Droites du plan.

28. Droites et plans de l'espace.
29. Droites remarquables du triangle.
30. Le cercle.
31. Solides de l'espace.
32. Produit scalaire.
33. Théorème de Thalès.
34. Trigonométrie.
35. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle.
36. Problèmes de constructions géométriques.
37. Problèmes de lieux géométriques.
38. Orthogonalité.
39. Suites monotones.
40. Limites de suites réelles.
41. Suites arithmétiques, suites géométriques.
42. Suites de terme général a^n , n^p et $\ln n$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$).
43. Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence.
44. Problèmes conduisant à l'étude de suites.
45. Limite d'une fonction réelle d'une variable réelle.
46. Théorème des valeurs intermédiaires.
47. Dérivation.
48. Fonctions polynômes du second degré.
49. Fonctions exponentielles.
50. Fonctions logarithmes.
51. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln x$.
52. Courbes planes définies par des équations paramétriques.
53. Intégrales, primitives.
54. Techniques de calcul d'intégrales.
55. Équations différentielles.
56. Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles.
57. Problèmes conduisant à l'étude de fonctions.
58. Développements limités.
59. Séries numériques.
60. Séries de Fourier.

61. Transformation de Laplace.
62. Courbes de Bézier.
63. Exemples d'études de courbes.
64. Aires.
65. Exemples d'algorithmes.
66. Exemples d'utilisation d'un tableur.
67. Exemples d'utilisation d'un logiciel de calcul formel.
68. Différents types de raisonnement en mathématiques.
69. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

Thème : probabilités

L'exercice

- 1) On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note la somme des deux faces obtenues.
 - 1.a) Donner un univers associé cette expérience.
 - 1.b) A-t-on plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 ? Justifier.
- 2) On lance maintenant trois dés et on note la somme des faces obtenues. A-t-on autant de chances d'obtenir 9 que 10 ?

La solution proposée par trois élèves à la question 1.b)

Élève 1

Non, on n'a pas plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 car le lancer est du pur hasard

Élève 2

La probabilité de 6 est $\frac{3}{11}$.

La probabilité de 7 est $\frac{3}{11}$.

Il y a autant de chance car leurs probabilités sont égales.

Élève 3

On n'a pas plus de chances d'obtenir 6 et 7 car pour 6 il faut 1 et 5 ; 2 et 4 ; 3 et 3.

Pour 7 il faut 1 et 6 ; 2 et 5 ; 3 et 4.

Les issues on les même probabilités, on parle alors d'une situation d'équiprobabilité.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en œuvre dans cet exercice ?
- 2- Pour chacune des réponses, indiquez le raisonnement que l'élève a pu suivre et l'origine de ses éventuelles erreurs.
- 3- Proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 4- Présentez deux ou trois exercices mettant en jeu les probabilités, dont un au moins demandera une simulation.

L'exercice

À partir d'un exercice d'un manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé à ses élèves l'exercice suivant.

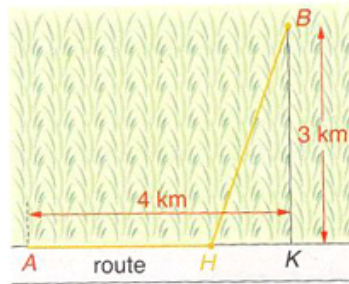
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{40} + \frac{1}{20} \sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

- 1) Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et calculez sa dérivée.
- 2) Dressez le tableau de variation de f . Déterminez pour quelle valeur x_0 cette fonction admet un minimum.
- 3) Donnez les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de x_0 et de $f(x_0)$.

L'exercice du manuel

Une voiture 4 × 4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ.



Sachant que sa vitesse sur la route est de 40 km/h et que sa vitesse à travers champs est de 20 km/h, déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

Hachette, Déclic Terminale S (2006)

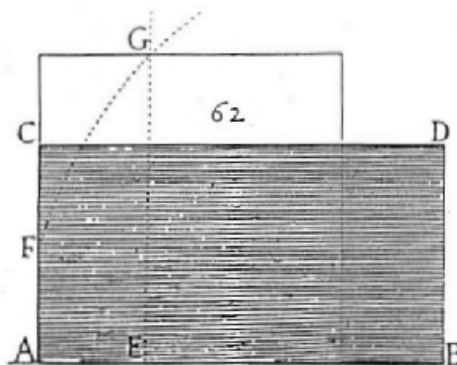
Le travail à exposer devant le jury

- 1- Comparez les compétences auxquelles les deux exercices ci-dessus font appel.
- 2- Citez différents logiciels permettant d'émettre une conjecture sur la solution de l'exercice du manuel et développez la mise en œuvre de l'un d'entre eux.
- 3- Proposez une correction de la question 2) de l'exercice du professeur comme vous la présenteriez à des élèves.
- 4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».

L'exercice

Voici une traduction en langage contemporain d'un document du XVII^e siècle écrit par le mathématicien hollandais Samuel Marolois (1572-1627).

Soit $ABDC$ un rectangle et F le milieu de $[AC]$. Le cercle de centre A et de rayon AF coupe $[AB]$ en E . Le cercle de centre B et de rayon BF coupe la perpendiculaire à (AB) passant par E en G .



GE est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à l'aire du rectangle $ABDC$.

Justifier la dernière affirmation du texte.

Les solutions proposées par deux élèves

Élève 1

Je fais une figure avec 4 cm et 7 cm et je vais démontrer que l'aire du carré vaut 28 cm².

Avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BAF j'ai :

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = 49 + 4$$

Donc $BF^2 = 53$, $BF = \sqrt{53} = 7,28$.

dans le triangle rectangle EBG j'ai $GB^2 = EB^2 + EG^2$, $7,28^2 = 25 + EG^2$. J'obtiens $EG = 5,29$ donc l'aire du carré est 27,98. Les deux aires sont égales.

Élève 2

J'ai mesuré sur le dessin et j'ai trouvé 2,8 cm et 5,3 cm.

Je vais démontrer que $GE^2 = 14,84$ cm².

Pythagore dans le triangle EGB : $14,84 = GB^2 - EB^2 = FB^2 - 15,21$.

Or $FB^2 = 30,05$ (Pythagore dans le triangle FAB). D'où $14,84 = 30,05 - 15,21$ vrai.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises et celles non acquises.
- 2- Quel peut être selon vous l'intérêt d'étudier des notions à travers une approche historique ?
- 3- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de troisième.
- 4- Présentez deux ou trois problèmes de construction, dont l'un au moins met en jeu un logiciel de géométrie dynamique.

L'exercice

Le directeur d'une salle de spectacle de 8000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser sa recette. Une étude de marché lui apprend que :

- ◇ si le prix du billet est de 50 euros il vend 3000 billets ;
- ◇ chaque baisse de 0,60 euros sur le prix du billet lui permet de vendre 100 billets supplémentaires.

Déterminez le prix du billet pour que la recette soit maximale.

Objectif général du programme de seconde

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- *modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;*
- *conduire un raisonnement, une démonstration ;*
- *pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;*
- *faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;*
- *pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;*
- *utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;*
- *communiquer à l'écrit et à l'oral.*

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines.

Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Proposez une résolution de l'exercice par deux méthodes différentes, comme vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 2- Ciblez précisément les compétences mentionnées dans le programme de seconde que ces méthodes de résolution permettent de développer.
- 3- Présentez deux ou trois problèmes avec prise d'initiative.

L'exercice

On s'intéresse à l'algorithme suivant.

```
Entrer un entier naturel non nul  $n$ 
  Tant que  $n \neq 20$  faire
    Si  $n < 20$  alors faire  $n \leftarrow 2 \times n$ 
      sinon faire  $n \leftarrow n - 4$ 
    Fin Si
  Fin Tant que
Afficher  $n$ 
```

- 1) Tester l'algorithme sur plusieurs entiers.
- 2) Émettre une conjecture concernant cet algorithme et la prouver.
- 3) Modifier l'algorithme pour qu'il affiche le nombre de boucles effectuées.

Des réponses proposées par trois élèves

Elève 1

1) J'ai testé avec 4, j'ai obtenu 8, avec 32, j'ai obtenu 28 et avec 10, j'ai obtenu 20.

Elève 2

2) L'algorithme finit toujours par afficher 20, même si ça prend du temps avec les grands nombres. En fait, pour les grands nombres, on enlève toujours 4, on finit donc par revenir vers des nombres qu'on a déjà testé avant. J'ai testé 1,2,3,...jusqu'à 20. Cela suffit pour montrer que la conjecture est en fait un théorème.

Elève 3

3) J'ai rajouté après le "fin si" l'instruction $k \leftarrow k + 1$, et j'ai demandé l'affichage de k après celui de n , mais ça me donne des résultats bizarres. C'est peut-être un bug de la machine.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences dans le domaine de la logique et de l'algorithmique.
- 2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 3- Présentez deux ou trois exercices faisant intervenir un algorithme.

L'exercice

Tracer un cercle de centre O , et placer un point A à l'intérieur du disque ainsi défini.
Choisir un point M sur le cercle, et construire le symétrique M' de A par rapport à M .
Recommencer avec d'autres points du cercle.

Que fait M' quand M parcourt le cercle ?
On pourra construire le symétrique de A par rapport à O .

Un extrait du préambule des programmes de collège

1. Divers aspects d'une démarche d'investigation.

Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.[...]

Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'explicitier les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Proposez le scénario d'une séance permettant d'engager les élèves dans une démarche d'investigation prenant appui sur l'exercice.
- 2- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de collège.
- 3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins peut être le support d'une démarche d'investigation.

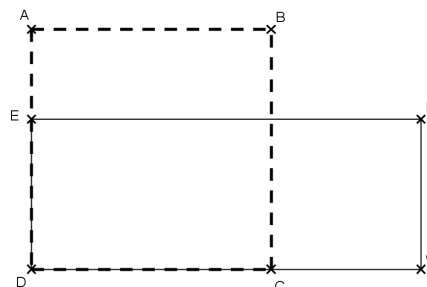
L'exercice

Le dessin ci-contre représente une figure composée d'un carré $ABCD$ et d'un rectangle $DEFG$.

E est un point du segment $[AD]$.

C est un point du segment $[DG]$.

Dans cette figure, la longueur AB peut varier mais on a toujours $AE = 15\text{ cm}$ et $CG = 25\text{ cm}$.



- 1) Dans cette question, on suppose que $AB = 40\text{ cm}$.
 - a) Calculer l'aire du carré $ABCD$.
 - b) Calculer l'aire du rectangle $DEFG$.
- 2) Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré $ABCD$ soit égale à l'aire du rectangle $DEFG$?
Si oui, calculer AB . Si non, expliquer pourquoi.
Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte.

La réponse de trois élèves à la question 2).

Elève 1

J'ai fait un tableau avec plusieurs valeurs, on voit que les deux aires vont être égales à un moment.

AB	aire du carré $ABCD$	aire du rectangle $DEFG$
40	1600	1625
30	900	825
35	1225	1200

J'ai essayé pile entre 35 et 40 : 37,5. C'est la bonne réponse !

Elève 2

J'ai appelé I l'intersection de (EF) et (BC) . Les deux aires sont égales si les rectangles $ABIE$ et $CGFI$ ont la même aire. Il faut donc que $15 \times AB = 25 \times GF$. C'est vrai pour $AB = 5$ et $GF = 3$. Donc il y a bien une solution.

Elève 3

Pour que les deux figures aient la même aire, il faut au moins qu'elles soient toutes les deux des carrés, mais ça n'est pas possible. Le problème n'a pas de solution.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez les productions des trois élèves, et indiquez pour chacun comment vous pourriez l'aider à améliorer son raisonnement.
- 2- Proposez une correction de la question 2) telle que vous la présenteriez à des élèves de collège.
- 3- Présentez deux ou trois problèmes pouvant conduire à la résolution d'équations.