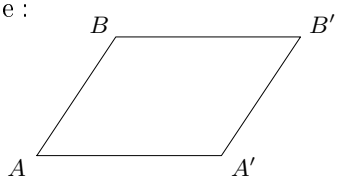
Chapitre 5

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE

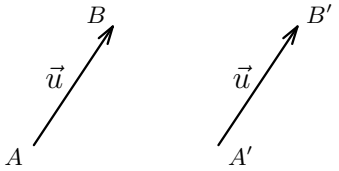
1 La structure d'espace vectoriel

1.1 Définition intuitive des vecteurs du plan et de l'espace

Intuitivement, un vecteur est ce qu'il y a de commun entre deux couples de points (A, B) et (A', B') lorsque $ABB'A'$ est parallélogramme :



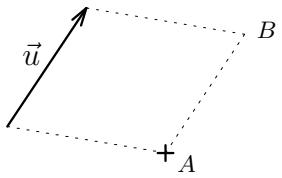
On dit alors que les couples (A, B) et (A', B') représentent *le même vecteur* $\vec{u}$, que l'on dessine d'une flèche allant du premier point du couple vers le second :



Nous ne connaissons donc intuitivement un vecteur $\vec{u}$ que par l'interface d'un couple de points (A, B) qui le *représente*.

En retour, *tout* couple de points (A, B) représente un vecteur $\vec{u}$, et :

Propriété Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A, il existe un point B et un seul tel que le couple (A, B) représente $\vec{u}$.



Notation. Le vecteur représenté par un couple de points (A, B) est noté $\overrightarrow{AB}$.

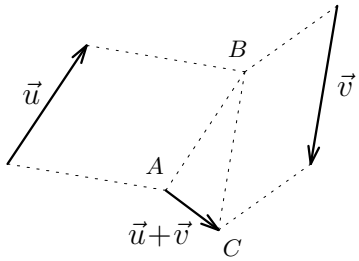
La propriété ci-dessus peut donc aussi s'énoncer :

" Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A, il existe un point B et un seul tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. "

Addition vectorielle L'addition des vecteurs se laisse définir par la célèbre relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

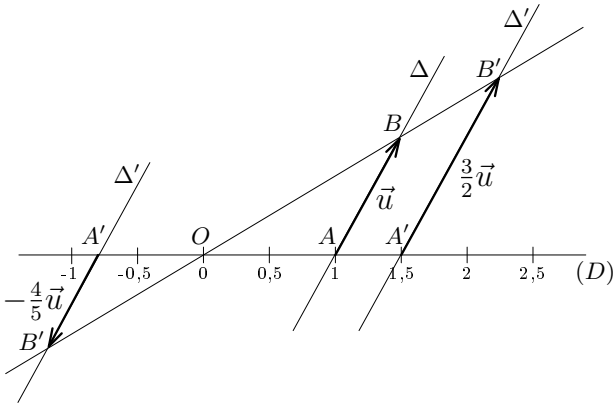
Cela définit bien l'addition $\vec{u} + \vec{v}$ de n'importe quels vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, car d'un point A choisi arbitrairement, il existe en vertu de la propriété ci-dessus un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, puis de même un unique point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, d'où : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Multiplication d'un vecteur par un réel Le produit $k.\vec{u}$ d'un réel k et d'un vecteur $\vec{u}$ se laisse décrire de la façon suivante :

Si $\vec{u}$ n'est représenté par aucun couple de points de la forme (P, P), on se donne une *droite graduée* (D) non parallèle à $\vec{u}$ (c'est-à-dire ne contenant aucun couple de points représentant $\vec{u}$), dans laquelle O est le point correspondant à la graduation 0 et A celui correspondant à la graduation 1. Soit B l'unique point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et Δ la droite (AB).

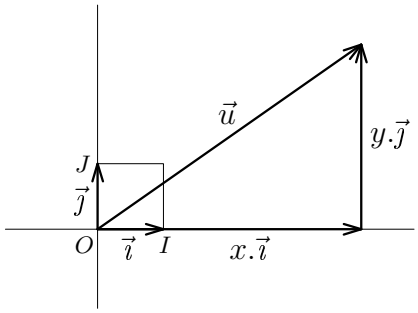
Pour tout réel k, soit A' le point de (D) correspondant à la graduation k et Δ' la droite parallèle à Δ passant par A'. $k.\vec{u}$ est alors le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où B' est l'intersection des droites (OB) et Δ' :



Si $\vec{u}$ est représenté par un couple de points de la forme (P, P), alors $\vec{u} = k.\vec{u}$ pour tout réel k.

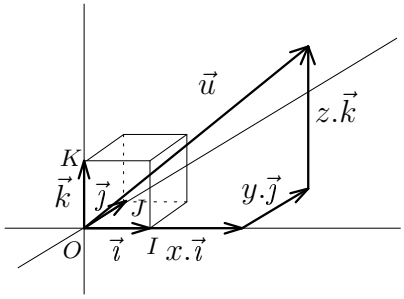
Base canonique et coordonnées d'un vecteur Alors que tout ce qui précède vaut indifféremment pour les vecteurs du plan ou ceux de l'espace, nous devons distinguer ici les deux cas.

Dans le plan, on a coutume de choisir une fois pour toutes deux vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ représentés par deux côtés adjacents (O, I), (O, J) d'un carré, et d'adopter comme unité de longueur : $OI = OJ = 1$. On appelle *base canonique* le couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de ces vecteurs. Il est intuitivement clair que tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$ pour un unique couple de réels (x, y) :



On dit alors que (x, y) sont les *coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On se convainc facilement que pour tout $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées du vecteur $k.\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont (kx, ky), et que pour tout vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x', y') dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, celles du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x+x', y+y')$.

Dans l'espace, on procède de façon analogue à partir d'un cube unité, dont on choisit une fois pour toutes trois arêtes adjacentes (O, I), (O, J), (O, K) représentant trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, et on appelle *base canonique* le triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Là aussi, il est intuitivement clair que tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = (x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}) + z.\vec{k}$ pour un unique triplet de réels (x, y, z) :



On dit alors que (x, y, z) sont les *coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1.2 Définition formelle des vecteurs du plan et de l'espace

Au lycée, pour exprimer qu'un vecteur $\vec{u}$ du plan a pour coordonnées (x, y) dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, autrement dit que (x, y) est l'unique couple de réels tel que : $\vec{u} = x.\vec{\imath} \boldsymbol{+} y.\vec{\jmath}$, on se contente d'écrire : $\vec{u}(x, y)$. C'est un peu court. À l'université, pour exprimer le même chose, il faut au moins écrire : $\vec{u} = (x, y)$, même si vous en avez été dissuadé à coups de règles antérieurement. *Mais pourquoi donc ?*

Parce que, désormais, nous avons besoin d'une *définition formelle* des vecteurs du plan, afin de *démontrer rigoureusement* le moindre fait les concernant. Et l'on choisit de définir un vecteur du plan directement comme le couple (x, y) de ses coordonnées dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. D'un point de vue philosophique, il peut paraître choquant de définir une notion d'essence géométrique par une donnée numérique. Toutefois, le philosophe peut admettre que le couple (x, y) des coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ précise univoquement ce vecteur $\vec{u}$ et qu'il peut donc bien lui servir de *nom*. Dès lors, tout ce que le philosophe peut reprocher au mathématicien, c'est de confondre l'*objet* avec son *nom*. Philosophiquement, c'est grave. Mathématiquement, c'est très pratique. Tellement que nous allons faire comme ça, en laissant le philosophe nous taxer d'*ultranominalisme* et traduire chacune de nos expressions « le vecteur (x, y) » par « *le vecteur dont les coordonnées sont* (x, y) ».

Définition On appelle *vecteur du plan* un couple de réels (x, y). L'ensemble des vecteurs du plan est donc $\mathbb{R}^2$. On définit l'*addition vectorielle* $\boldsymbol{+}$ par :

$$(x, y) \boldsymbol{+} (x', y') = (x + x', y + y')$$

et la *multiplication externe* . entre un réel k et un vecteur (x, y) par :

$$k.(x, y) = (kx, ky).$$

L'ensemble des vecteurs du plan, muni de ces deux opérations, est alors appelé *espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$.

Remarque. L'addition vectorielle est dite *interne* car elle ne s'applique qu'à des vecteurs de $\mathbb{R}^2$; on la note $\boldsymbol{+}$ pour la distinguer de l'addition $+$ des réels. Par opposition, la multiplication définie ci-dessus est dite *externe* car elle s'applique à un réel et à un vecteur de $\mathbb{R}^2$; on la note par un point pour la distinguer de la multiplication des réels (qui, elle, est notée sans point).

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont par définition les vecteurs $\vec{\imath} \overset{\text{déf}}{=} (1, 0)$, $\vec{\jmath} \overset{\text{déf}}{=} (0, 1)$. Ainsi, lorsqu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans cette base, on a bien le droit d'écrire :

$$\vec{u} = x.\vec{\imath} \boldsymbol{+} y.\vec{\jmath} \overset{\text{déf}}{=} x.(1, 0) \boldsymbol{+} y.(0, 1) \overset{\text{déf}}{=} (x, 0) \boldsymbol{+} (0, y) \overset{\text{déf}}{=} (x, y).$$

À l'aide de la définition formelle ci-dessus de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on peut enfin démontrer rigoureusement des propriétés de ses opérations, par exemple *l'associativité de l'addition* $\boldsymbol{+}$:

Proposition On a pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} \boldsymbol{+} (\vec{v} \boldsymbol{+} \vec{w}) = (\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v}) \boldsymbol{+} \vec{w}.$$

Démonstration. On a $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ et $\vec{w} = (x'', y'')$ pour certains réels x, y, x', y', x'', y''. Il s'ensuit :

$$\vec{u} \boldsymbol{+} (\vec{v} \boldsymbol{+} \vec{w}) = (x, y) \boldsymbol{+} ((x', y') \boldsymbol{+} (x'', y'')) = (x, y) \boldsymbol{+} (x'+x'', y'+y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$$
$$(\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v}) \boldsymbol{+} \vec{w} = ((x, y) \boldsymbol{+} ((x', y')) \boldsymbol{+} (x'', y'') = (x+x', y+y') \boldsymbol{+} (x'', y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$$

donc $\vec{u} \boldsymbol{+} (\vec{v} \boldsymbol{+} \vec{w}) = (\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v}) \boldsymbol{+} \vec{w}$.

□

Cette propriété d'associativité permet de noter simplement $\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v} \boldsymbol{+} \vec{w}$ sans préciser l'ordre dans lequel sont effectuées les deux additions de cette somme, à savoir $(\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v}) \boldsymbol{+} \vec{w}$ ou $\vec{u} \boldsymbol{+} (\vec{v} \boldsymbol{+} \vec{w})$, puisque cela n'influe pas sur la valeur de la somme. De même, l'associativité entraîne pour quatre termes :

$$\vec{u}_1 \boldsymbol{+} ((\vec{u}_2 \boldsymbol{+} \vec{u}_3) \boldsymbol{+} \vec{u}_4) = \vec{u}_1 \boldsymbol{+} (\vec{u}_2 \boldsymbol{+} (\vec{u}_3 \boldsymbol{+} \vec{u}_4)) = (\vec{u}_1 \boldsymbol{+} \vec{u}_2) \boldsymbol{+} (\vec{u}_3 \boldsymbol{+} \vec{u}_4) =$$
$$((\vec{u}_1 \boldsymbol{+} \vec{u}_2) \boldsymbol{+} \vec{u}_3) \boldsymbol{+} \vec{u}_4 = ((\vec{u}_1 \boldsymbol{+} (\vec{u}_2 \boldsymbol{+} \vec{u}_3)) \boldsymbol{+} \vec{u}_4$$

de sorte que toutes les façons d'organiser les additions d'une somme de quatre termes sans en changer l'ordre (il n'y en a pas d'autre que les 5 ci-dessus) sont sans effet sur la valeur de la somme. On peut

donc simplement noter : $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4$ cette somme. Plus généralement, on se permet d'écrire :

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \cdots + \vec{u}_n$$

car la façon de préciser les parenthèses de cette somme est sans importance.

On définit maintenant les vecteurs de l'espace d'une façon analogue à ceux du plan.

Définition On appelle *vecteur de l'espace* un triplet de réels (x, y, z). L'ensemble des vecteurs de l'espace est donc $\mathbb{R}^3$. On définit l'*addition vectorielle* $+$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

et la *multiplication externe* $.$ entre un réel k et un vecteur (x, y, z) par :

$$k.(x, y, z) = (kx, ky, kz).$$

L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de ces deux opérations, est alors appelé *espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$.

Comme pour l'addition vectorielle de $\mathbb{R}^2$, on vérifie facilement que l'addition vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est *associative*, c'est-à-dire :

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$$

de sorte que l'on se permet d'écrire des sommes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \cdots + \vec{u}_n$$

sans en préciser le parenthésage.

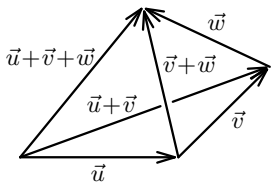
Les vecteurs de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ sont $\vec{\imath} \overset{\text{déf}}{=} (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} \overset{\text{déf}}{=} (0, 1, 0)$ et $\vec{k} \overset{\text{déf}}{=} (0, 0, 1)$. Lorsqu'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées (x, y, z) dans cette base, on a donc :

$$\vec{u} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k} \overset{\text{déf}}{=} x.(1, 0, 0) + y.(0, 1, 0) + z.(0, 0, 1) \overset{\text{déf}}{=} (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \overset{\text{déf}}{=} (x, y, z).$$

Propriétés algébriques des opérations $+$ et $.$

Passons maintenant en revue quelques propriétés qui sont communes aux opérations $+$, $.$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et aux opérations $+$, $.$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On se contentera de les démontrer pour les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, les preuves pour $\mathbb{R}^3$ étant analogues. Commençons par rappeler la propriété d'associativité de l'addition, démontrée plus haut :

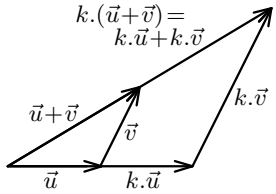
- *Associativité de l'addition* $+$: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$



- *Pseudo-associativité de la multiplication* $.$: $k.(l.\vec{u}) = (kl).\vec{u}$

En effet, pour tout $\vec{u} = (x, y)$, on a : $k.(l.\vec{u}) = k.(lx, ly) = (klx, kly) = (kl).(x, y) = (kl).\vec{u}$.
Cette propriété est appelée *pseudo*-associativité, car elle met en jeu un *produit de réels* (kl) et n'est donc pas une propriété de la seule opération : $.$ (contrairement à l'associativité de l'opération $+$ ci-dessus).

- *Distributivité de la multiplication* $.$ *sur l'addition* $+$: $k.(\vec{u} + \vec{v}) = k.\vec{u} + k.\vec{v}$



En effet, pour tous $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$, on a : $k.(\vec{u} + \vec{v}) = k.(x+x', y+y') = \big(k(x+x'), k(y+y')\big) = (kx+kx', ky+ky') = (kx, ky) + (kx', ky') = k.(x, y) + k.(x', y') = k.\vec{u} + k.\vec{v}$.
Cette propriété exprime l'antique Théorème de Thalès.

• *Pseudo-distributivité de la multiplication* $\boldsymbol{.}$ *sur l'addition* $\boldsymbol{+}$ *:* $(k+l).\vec{u} = k.\vec{u} \boldsymbol{+} l.\vec{u}$

En effet, pour tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$, on a : $(k+l).\vec{u} = \big((k+l)x, (k+l)y\big) = (kx+lx, ky+ly) = (kx, ky) \boldsymbol{+} (lx, ly) = k.(x, y) \boldsymbol{+} l.(x, y) = k.\vec{u} \boldsymbol{+} l.\vec{u}$.

Cette propriété est appelée *pseudo*-distributivité, car avant de distribuer la multiplication par $\vec{u}$ sur l'addition, celle-ci n'est qu'une *addition de réels* $(k+l)$ et non une opération $\boldsymbol{+}$.

• *Propriété d'élément neutre du réel* 1 *:* $1.\vec{u} = \vec{u}$

En effet, pour tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$, on a : $1.\vec{u} = (1\,x,\, 1\,y) = (x, y) = \vec{u}$.

• *Propriété d'élément absorbant du réel* 0 *:* $0.\vec{u} = 0.\vec{v}$

En effet, pour tous vecteurs $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$, on a : $0.\vec{u} = (0\,x,\, 0\,y) = (0, 0) = (0\,x',\, 0\,y') = 0.\vec{v}$.

En résumé :

- $\vec{u} \boldsymbol{+} (\vec{v} \boldsymbol{+} \vec{w}) \overset{A}{=} (\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v}) \boldsymbol{+} \vec{w}$
- $k.(l.\vec{u}) \overset{\not{A}}{=} (kl).\vec{u}$
- $1.\vec{u} \overset{1}{=} \vec{u}$
- $k.(\vec{u} \boldsymbol{+} \vec{v}) \overset{D}{=} k.\vec{u} \boldsymbol{+} k.\vec{v}$
- $(k+l).\vec{u} \overset{\not{D}}{=} k.\vec{u} \boldsymbol{+} l.\vec{u}$
- $0.\vec{u} \overset{0}{=} 0.\vec{v}$

(A pour *associativité*, $\not{A}$ pour *pseudo-associativité*, D pour *distributivité* et $\not{D}$ pour *pseudo-distributivité*.)

1.3 Définition abstraite d'espace vectoriel réel & exemples concrets

Définition On appelle *espace vectoriel réel* un ensemble $\boldsymbol{E} \neq \varnothing$ d'éléments quelconques muni de deux opérations :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{+} \ : \ & \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{.} \ : \ & \mathbb{R} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \\ & (k, \boldsymbol{u}) \mapsto k.\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés :

- $\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) \overset{A}{=} (\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}$
- $k.(l.\boldsymbol{u}) \overset{\not{A}}{=} (kl).\boldsymbol{u}$
- $1.\boldsymbol{u} \overset{1}{=} \boldsymbol{u}$
- $k.(\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v}) \overset{D}{=} k.\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} k.\boldsymbol{v}$
- $(k+l).\boldsymbol{u} \overset{\not{D}}{=} k.\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} l.\boldsymbol{u}$
- $0.\boldsymbol{u} \overset{0}{=} 0.\boldsymbol{v}$.

Une grande erreur serait de croire que l'on s'est contenté de répéter ici ce qu'est l'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ ou celui des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$: Quand on parle d'un espace vectoriel réel $\boldsymbol{E}$, on n'entend par là *rien de plus* qu'un ensemble muni de deux opérations $\boldsymbol{+}$, $\boldsymbol{.}$ comme ci-dessus. Les éléments de cet ensemble $\boldsymbol{E}$ peuvent bien être des vecteurs au sens géométrique plus haut, ou encore des fonctions, des nombres ou des n-uplets d'objets mathématiques quelconques. Pour bien s'en convaincre, donnons quelques exemples courants d'espaces vectoriels réels :

Exemple 0 : $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Les exemples primordiaux sont bien sûr ceux des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$ considérés plus haut.

Exemple 1 : $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^n$. Plus généralement, on peut considérer l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels, muni des opérations :

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \boldsymbol{+} (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \overset{\text{déf}}{=} (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$
- $k.(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{déf}}{=} (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$.

On vérifie facilement, comme pour les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, que ces opérations satisfont les six propriétés de la définition d'espace vectoriel ci-dessus. Serions-nous ici en train d'envisager une pure abstraction mathématique ? Ce n'est pas sûr. Bien que nous ayons quotidiennement l'impression de vivre dans un espace à trois dimensions, la théorie de la relativité restreinte nous explique que nous serions dans un espace-temps dont toute la physique se décrit dans l'espace $\mathbb{R}^4$; et les différentes théories des cordes nous projettent dans des espaces $\mathbb{R}^n$ pour des entiers n bien supérieurs ...

Exemple 2 : $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}[x]$. Nous avons vu au chapitre 3 comment faire la somme $P(x) \boldsymbol{+} Q(x)$ de deux polynômes $P(x), Q(x)$ de $\mathbb{R}[x]$ et le produit $k.P(x)$ d'un polynôme constant k par un polynôme quelconque $P(x)$. Par ailleurs, l'associativité de l'addition et de la multiplication des polynômes, ainsi que la pleine distributivité de la dernière sur la première assurent les six propriétés de la définition d'espace vectoriel réel.

Exemple 3 : $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est naturellement muni d'opérations $f \boldsymbol{+} g$ et $k.f$ définies par :

$$\begin{aligned} f \boldsymbol{+} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t)+g(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k.f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto kf(t). \end{aligned}$$

Puisque l'addition et la multiplication des réels sont associatives, et la seconde distributive sur la première, on vérifie aisément x par x chacune des six propriétés de la définition d'espace vectoriel réel dans ce cas. Cet exemple d'espace vectoriel est effroyablement plus vaste que les précédents, comme nous le sentirons mieux par la suite.

Exemple 4 : $\boldsymbol{E} = \mathbb{C}$. On revient là à un exemple beaucoup plus modeste. L'addition $z \boldsymbol{+} z'$ des nombres complexes est celle définie au Chapitre 1, et la multiplication $k.z'$ d'un réel k par un complexe z' une simple restriction de la multiplication complexe $z.z'$. Les propriétés algébriques des opérations complexes assurent évidemment les six propriétés de la définition d'espace vectoriel.

Mais pourquoi donc avoir écrit cette définition si générale d'espace vectoriel ? Parce tout ce que l'on va démontrer pour un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ quelconque sera vrai, et même *très utile*, pour les espaces précités et bien d'autres encore. Pour un informaticien, cela ressemble à de la programmation "objet" : on ne sait pas de quoi on parle vraiment, et pourtant tout ce que l'on va établir pour un espace vectoriel indéterminé $\boldsymbol{E}$ sera *illico* vérifié par n'importe quel exemple particulier comme plus haut ou à venir.

On commence :

1.4 Propriétés algébriques fondamentales d'un espace vectoriel réel

Dans toute cette nouvelle section, on se place dans un espace vectoriel réel $\boldsymbol{E}$ *quelconque*. Autrement dit, on ne sait pas si les vecteurs dont on va parler sont ceux du plan, de l'espace, ou des fonctions, des nombres, des n-uplets de nombres ...

Conséquemment, nous allons justifier très scrupuleusement *chaque* égalité de *chaque* démonstration ci-dessous en la surmontant d'un signe : $\overset{A}{=}$, $\overset{D}{=}$, $\overset{\not{A}}{=}$, $\overset{\not{D}}{=}$, $\overset{1}{=}$ ou $\overset{0}{=}$ lorsque l'égalité résulte de l'une des six propriétés de la définition abstraite de $\boldsymbol{E}$, $\overset{\mathbb{R}}{=}$ lorsqu'elle résulte d'un simple calcul sur les nombres réels et $\overset{\text{déf}}{=}$ lorsqu'elle résulte d'une définition précédemment posée.

En vertu de la propriété $0.\boldsymbol{u} \overset{0}{=} 0.\boldsymbol{v}$, le produit $0.\boldsymbol{u}$ ne dépend pas du vecteur $\boldsymbol{u}$:

Définition On appelle *vecteur nul* et l'on note $\mathbf{0}$ l'unique vecteur égal à $0.\boldsymbol{u}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$:

$$\mathbf{0} \overset{\text{déf}}{=} 0.\boldsymbol{u}$$

Proposition Le vecteur nul $\mathbf{0}$ est *élément neutre* de l'addition vectorielle $\boldsymbol{+}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \mathbf{0} = \mathbf{0} \boldsymbol{+} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}}$$

Démonstration. On a pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \mathbf{0} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{u} \boldsymbol{+} 0.\boldsymbol{u} \overset{1}{=} 1.\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} 0.\boldsymbol{u} \overset{\not{D}}{=} (1+0).\boldsymbol{u} \overset{\mathbb{R}}{=} 1.\boldsymbol{u} \overset{1}{=} \boldsymbol{u}$$

$$\mathbf{0} \boldsymbol{+} \boldsymbol{u} \overset{\text{déf}}{=} 0.\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{u} \overset{1}{=} 0.\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} 1.\boldsymbol{u} \overset{\not{D}}{=} (0+1).\boldsymbol{u} \overset{\mathbb{R}}{=} 1.\boldsymbol{u} \overset{1}{=} \boldsymbol{u}$$

□

Définition Pour tout vecteur $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$, on note :

$$\boldsymbol{-u} \overset{\text{déf}}{=} (-1).\boldsymbol{u}$$

et on note plus simplement $\boldsymbol{u} \boldsymbol{-} \boldsymbol{v}$ la somme $\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} (\boldsymbol{-v})$.

Proposition Pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$, le vecteur $-\boldsymbol{u}$ est *l'opposé* de $\boldsymbol{u}$ pour l'addition vectorielle $+$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}}$$

Démonstration. On a pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{u} + (-1).\boldsymbol{u} \overset{1}{=} 1.\boldsymbol{u} + (-1).\boldsymbol{u} \overset{\mathbb{D}}{=} (1-1).\boldsymbol{u} \overset{\mathbb{R}}{=} 0.\boldsymbol{u} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{0}$$

$$-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \overset{\text{déf}}{=} (-1).\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \overset{1}{=} (-1).\boldsymbol{u} + 1.\boldsymbol{u} \overset{\mathbb{D}}{=} (-1+1).\boldsymbol{u} \overset{\mathbb{R}}{=} 0.\boldsymbol{u} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{0}$$

□

En résumé, l'addition vectorielle $+$ est associative, possède un élément neutre $\boldsymbol{0}$ tel que tout vecteur a un opposé. On dit alors que l'ensemble $\boldsymbol{E}$ muni de l'opération $+$ est un *groupe*.

Proposition L'addition vectorielle $+$ est *régulière*, c'est-à-dire que l'on peut simplifier d'un même terme à gauche ou à droite les deux membres d'une égalité :

- Si $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{v}$, alors $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u'}$.
- Si $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u'}$, alors $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u'}$.

Démonstration. • Si $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{v}$, alors $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u'} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}$. Comme l'opération $+$ est associative, il s'ensuit $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u'} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v})$, puis, du fait que $-\boldsymbol{v}$ est l'opposé de $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{0}$, et puisque $\boldsymbol{0}$ est élément neutre : $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u'}$.
• De même, si $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u'}$, alors $-\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u'})$, d'où par associativité : $(-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} = (-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u'}$, soit encore, du fait que $-\boldsymbol{v}$ est l'opposé de $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u'}$ et finalement : $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u'}$ puisque $\boldsymbol{0}$ est élément neutre de $+$.

□

Proposition L'addition vectorielle $+$ est *commutative*, c'est-à-dire que pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$:

$$\boxed{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \overset{C}{=} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}}$$

Démonstration. On a pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$:

$$2.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \overset{D}{=} 2.\boldsymbol{u} + 2.\boldsymbol{v} \overset{\mathbb{R}}{=} (1+1).\boldsymbol{u} + (1+1).\boldsymbol{v} \overset{\mathbb{D}}{=} 1.\boldsymbol{u} + 1.\boldsymbol{u} + 1.\boldsymbol{v} + 1.\boldsymbol{v} \overset{1}{=} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}$$

mais, par ailleurs :

$$2.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \overset{\mathbb{R}}{=} (1+1).(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \overset{\mathbb{D}}{=} 1.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + 1.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \overset{1}{=} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

Ainsi, on a :

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

Puisque l'addition vectorielle $+$ est régulière, on peut simplifier cette égalité à gauche par $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

puis à droite par $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

□

Alors que *l'associativité* de l'opération $+$ permet seulement d'oublier le parenthésage dans une somme $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{u_n}$, la *commutativité* de $+$ autorise aussi de changer l'ordre des termes d'une telle somme. Par exemple, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}$, car :

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} \overset{C}{=} (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} \overset{A}{=} \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) \overset{C}{=} \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}.$$

Par contraste, la composition des fonctions, qui est associative mais pas commutative, permet d'écrire : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$, tandis qu'en général : $f \circ g \circ h \neq g \circ h \circ f$.

Plus que les notions de *somme* de vecteurs ou de *produit* par un réel, la notion d'usage constant en algèbre linéaire est celle de *combinaison linéaire* :

Définition On appelle *combinaison linéaire de vecteurs* $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ un vecteur qui se laisse écrire sous la forme :

$$k_1.\boldsymbol{v_1} + k_2.\boldsymbol{v_2} + \ldots + k_n.\boldsymbol{v_n}$$

pour des réels $k_1, k_2, \ldots, k_n$ quelconques.

Une propriété de cette notion de combinaison linéaire qu'on utilise à tout propos est sa transitivité :

Proposition Les combinaisons linéaires de combinaisons linéaires de vecteurs sont des combinaisons linéaires de ces vecteurs (ce n'est pas un dicton espagnol). En clair : si $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_p}$ sont des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$, alors toute combinaison linéaire $\boldsymbol{w}$ de $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_p}$ est directement une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$.

Démonstration. Si $\boldsymbol{w}$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_p}$, mettons : $\boldsymbol{w} = k_1.\boldsymbol{v_1} + \cdots + k_p.\boldsymbol{v_p}$, et chaque vecteur $\boldsymbol{v_i}$ une combinaison linéaire de $\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$, mettons :

$$\boldsymbol{v_1} = l_{11}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + l_{1n}.\boldsymbol{u_n}, \quad \boldsymbol{v_2} = l_{21}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + l_{2n}.\boldsymbol{u_n} \quad \ldots \quad \boldsymbol{v_p} = l_{p1}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + l_{pn}.\boldsymbol{u_n},$$

alors :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= k_1.(l_{11}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + l_{1n}.\boldsymbol{u_n}) + k_2.(l_{21}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + l_{2n}.\boldsymbol{u_n}) + \cdots\cdots + k_p.(l_{p1}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + l_{pn}.\boldsymbol{u_n}) \\
&\overset{D}{=} k_1.(l_{11}.\boldsymbol{u_1}) + \cdots + k_1.(l_{1n}.\boldsymbol{u_n}) + k_2.(l_{21}.\boldsymbol{u_1}) + \cdots + k_2.(l_{2n}.\boldsymbol{u_n}) + \cdots + k_p.(l_{p1}.\boldsymbol{u_1}) + \cdots + k_p.(l_{pn}.\boldsymbol{u_n}) \\
&\overset{A}{=} k_1 l_{11}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + k_1 l_{1n}.\boldsymbol{u_n} + k_2 l_{21}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + k_2 l_{2n}.\boldsymbol{u_n} + \cdots\cdots + k_p l_{p1}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + k_p l_{pn}.\boldsymbol{u_n} \\
&\overset{C}{=} k_1 l_{11}.\boldsymbol{u_1} + k_2 l_{21}.\boldsymbol{u_1} + \cdots + k_p l_{p1}.\boldsymbol{u_1} + \cdots\cdots + k_1 l_{1n}.\boldsymbol{u_n} + k_2 l_{2n}.\boldsymbol{u_n} + \cdots + k_p l_{pn}.\boldsymbol{u_n} \\
&\overset{D}{=} (k_1 l_{11} + k_2 l_{21} + \cdots + k_p l_{p1}).\boldsymbol{u_1} + \cdots\cdots + (k_1 l_{1n} + k_2 l_{2n} + \cdots + k_p l_{pn}).\boldsymbol{u_n}.
\end{aligned}$$

Remarquons que cette preuve dépend essentiellement de la vaste réorganisation $\overset{C}{=}$ des termes qui y est faite par commutativité.

□

1.5 Sous-espaces vectoriels

Désormais, nous utiliserons les notations usuelles, qui consistent à noter les vecteurs en caractères normaux : $u, v, v', v'', v_1, v_2, \ldots$ le vecteur nul comme le réel 0, l'addition vectorielle comme l'addition des réels + et la multiplication externe comme la multiplication des réels : kv. Charge au lecteur de comprendre qui est vecteur, qui est nombre réel et quelles sont les opérations invoquées.

Définition On appelle *sous-espace* d'un espace vectoriel réel E un sous-ensemble F de E tel que :

- $0 \in F$
- $u \in F$ et $v \in F \Rightarrow u+v \in F$
- $k \in \mathbb{R}$ et $u \in F \Rightarrow ku \in F$.

N.B. Le 0 dans cette définition désigne bien sûr le vecteur nul.

Définition bis On appelle *sous-espace* d'un espace vectoriel réel E une partie *non vide* F de E telle que toute combinaison linéaire de vecteurs de F appartient à F.

Ces deux définitions sont équivalentes, car si F est un sous-espace au sens de la première d'entre elles, alors F est non vide (puisque $0 \in F$) et pour toute combinaison linéaire $u = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$ de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de F, les vecteurs $k_1 v_1, \ldots, k_n v_n$ appartiennent à F en vertu du dernier point de cette première définition, donc leur somme u aussi en vertu du second point. Ainsi, F est alors un sous-espace au sens de la définition bis.
Réciproquement, si F est un sous-espace au sens de la définition bis, alors pour tous vecteurs u, v de F et tout $k \in \mathbb{R}$, les combinaisons linéaires de vecteurs de F : $0\,(=0\,u)$, $u + v\,(=1\,u + 1\,v)$ et $k\,u$ appartiennent à F, donc F est bien un sous-espace au sens de la première définition.

Remarque. Un sous-espace quelconque F d'un espace vectoriel E est *lui-même* un espace vectoriel. En effet, en restreignant l'addition vectorielle et la multiplication externe de l'espace E à la partie F, on obtient alors deux opérations $+ : F \times F \to F$ et $. : \mathbb{R} \times F \to F$ vérifiant les six propriétés de la définition d'espace vectoriel (ces propriétés vérifiées par tous les vecteurs de E le sont a fortiori par

ceux de $F \subset E$). Les sous-espaces d'espaces vectoriels offrent donc de nouveaux exemples d'espaces vectoriels, parfois bien plus intéressants que l'espace E dont ils sont issus :

Exemple 0 : E espace vectoriel quelconque. Soit $F = \{kv \mid k \in \mathbb{R}\}$. C'est un sous-espace de E (*démonstration*).

- Si $v = 0$ (c.-à-d. si v est le vecteur nul), alors $F = \{0\}$. C'est le plus petit sous-espace possible dans tout espace vectoriel réel E.
- Si $v \neq 0$, alors F est appelé *droite vectorielle* D_v.

Exemple 1 : $E = \mathbb{R}^n$. Soit $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ (*démonstration*).

- Si $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$, alors $F = \mathbb{R}^n$. C'est le plus grand sous-espace possible.
- Si $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, alors F est appelé *hyperplan de* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2 : $E = \mathbb{R}[x]$. Le sous-ensemble F_n des polynômes de degré n n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}[x]$, car par exemple $P(x) = x^n$ et $Q(x) = -x^n + x^{n-1}$ sont des vecteurs de F_n, tandis que $P + Q \notin F_n$; plus simplement, F_n ne possède pas le vecteur nul $P(x) = 0$, dont le degré est $-\infty$. En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré $\leqslant n$, noté $\mathbb{R}_n[x]$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ (*démonstration*).

Exemple 3 : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ solutions de l'équation différentielle : $x'(t) = a\,x(t)$. Cette équation a de nombreuses occurrences dans toutes les sciences : par exemple, si x est la concentration d'un composé chimique en réaction lente avec une espèce surabondante *(cinétique chimique)* ou si x est la quantité d'un isotope radioactif *(nucléochimie)* ou encore si x est le potentiel de la grille d'un transitor à effet de champ (MOSFET) changeant d'état 0/1 *(hardware informatique, physique)*. $\mathcal{S}_1$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (*démonstration*).
Soit $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ solutions de l'équation différentielle : $ax''(t)+bx'(t)+cx(t) = 0$. Cette équation a aussi beaucoup d'exemples concrets : par exemple, si x est la hauteur de la suspension d'une roue de voiture dont le ressort a une constante de raideur k et l'amortisseur une constante de frottement λ, alors : $mx''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = 0$, où m est la part de masse de l'automobile portée sur la suspension. Ou encore si x est le potentiel en un point d'un circuit RLC. $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (*démonstration*).

Exemple 4 : $E = \mathbb{C}$. On va déterminer ici tous les sous-espaces de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$. En suivant l'exemple *0* plus haut, $\mathbb{C}$ contient déjà comme sous-espaces :

- le sous-espace nul $\{0\}$ (le plus petit sous-espace),
- la droite vectorielle $D_z = \{kz \mid k \in \mathbb{R}\}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}$ autre que ceux-là. F possède alors un élément $z_1 \neq 0$ (sinon $F = \{0\}$) et un élément z_2 tel que $z_2/z_1 \notin \mathbb{R}$ (sinon pour tout $z \in F$, $z/z_1 = k \in \mathbb{R}$, z est de la forme kz_1, donc F est la droite vectorielle D_{z_1}). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, soit $k_2 = \operatorname{Im}\frac{z}{z_1} / \operatorname{Im}\frac{z_2}{z_1}$; on a alors : $\operatorname{Im}\frac{z}{z_1} = \operatorname{Im}\left(k_2\frac{z_2}{z_1}\right)$, d'où : $\frac{z}{z_1} - k_2\frac{z_2}{z_1} = k_1 \in \mathbb{R}$, $\frac{z}{z_1} = k_1 + k_2\frac{z_2}{z_1}$. Ainsi, $z = k_1z_1 + k_2z_2$, combinaison linéaire des vecteurs z_1, z_2 du sous-espace F, est un vecteur de F, et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'où $F = \mathbb{C}$. Nous venons de démontrer que le seul autre sous-espace F de $\mathbb{C}$ est :

- le sous-espace plein $\mathbb{C}$.

Proposition Si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces d'un espace vectoriel E, alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$ est un sous-espace de E.

Démonstration. Dans ce cas, le vecteur nul 0 appartient à chacun des sous-espaces F_i. Il s'ensuit $0 \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$. De plus, pour tous $x, y \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$, $x+y$ est pour chaque i la somme de deux vecteurs du sous-espace F_i, d'où $x+y \in F_i$, et donc $x+y \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$. De même, pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $x \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$, kx appartient à chaque sous-espace F_i, donc $kx \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$. Cela prouve que $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$ est un sous-espace de E. □

Remarque. Cette dernière proposition amène un exemple intéressant de (sous-)espace vectoriel : l'ensemble des solutions d'un *système linéaire homogène* quelconque. En effet, si un tel système a pour inconnues mettons $x_1, \ldots, x_n$, alors l'ensemble de chaque équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ de ce système est selon l'exemple 1 ci-dessus un hyperplan F_i de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions du système est alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$, donc un (sous-)espace vectoriel (de $\mathbb{R}^n$).

En revanche, la réunion $F_1 \cup F_2$ de deux sous-espaces F_1, F_2 d'un espace vectoriel E n'est en général pas un sous-espace de E : Les hyperplans $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ ont pour vecteurs $(0, 1) \in F_1 \subset F_1 \cup F_2$ et $(1, 0) \in F_2 \subset F_1 \cup F_2$; pourtant $(1, 1) = (0, 1) + (1, 0)$ n'appartient pas à $F_1 \cup F_2$.

2 Bases et dimension

2.1 Le vrai cadre de cette introduction à l'algèbre linéaire

Cette introduction à l'algèbre linéaire se limite en fait à l'étude des espaces vectoriels réels qui sont *finiment engendrés* au sens suivant :

Définition On dit qu'un espace E est *finiment engendré* s'il existe un nombre fini de vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que tout vecteur de E est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$.

Il était inutile de préciser plus tôt cette restriction, puisque les faits établis jusqu'ici se démontrent aussi facilement dans le cas général que dans le cadre restreint des espaces finiment engendrés. Il n'en est plus ainsi dorénavant. Et nous allons faire un inventaire des exemples précédents d'espaces vectoriels et de leurs sous-espaces, afin d'en extirper les espaces non finiment engendrés. Mais mentionnons d'abord la proposition suivante, dont on pourra sauter la démonstration en première lecture :

Proposition Tout sous-espace d'un espace vectoriel finiment engendré est finiment engendré.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel finiment engendré. Il existe donc des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que tout vecteur de E est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$.

Supposons, pour en déduire une contradiction, que E contienne un sous-espace F qui ne soit pas finiment engendré. Dans ce cas, F possède un vecteur $w_1 \neq 0$ (sinon F ne posséderait que le vecteur 0, donc tout vecteur de F serait combinaison linéaire du vecteur 0 et F serait finiment engendré). F possède aussi un vecteur w_2 qui n'est pas combinaison linéaire du seul vecteur w_1 (sinon F serait finiment engendré). De même, F possède un vecteur w_3 qui n'est pas combinaison linéaire de w_1, w_2 (sinon F serait là encore finiment engendré), puis un vecteur w_4 qui n'est pas combinaison linéaire de w_1, w_2, w_3 et ainsi de suite. On définit de la sorte une suite $w_1, w_2, w_3, \ldots$ de vecteurs de F tels que $w_1 \neq 0$ et tels que pour tout $i \geqslant 2$, w_i n'est pas combinaison linéaire de $w_1, w_2, \ldots, , w_{i-1}$. Arrêtons-nous à un vecteur w_m où $m > n$. Tous ces vecteurs w_i sont combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$:

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & k_{11}\, v_1 + k_{21}\, v_2 + k_{31}\, v_3 + \cdots + k_{n1}\, v_n \\ w_2 & = & k_{12}\, v_1 + k_{22}\, v_2 + k_{32}\, v_3 + \cdots + k_{n2}\, v_n \\ w_3 & = & k_{13}\, v_1 + k_{23}\, v_2 + k_{33}\, v_3 + \cdots + k_{n3}\, v_n \\ & \vdots & \\ w_m & = & k_{1m} v_1 + k_{2m} v_2 + k_{3m} v_3 + \cdots + k_{nm} v_n \end{array} \qquad (*)$$

Comme le système suivant a un nombre m d'inconnues strictement supérieur à celui n de ses équations :

$$\left[\begin{array}{rcl} k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \cdots + k_{1m}x_m & = & 0 \\ k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + \cdots + k_{2m}x_m & = & 0 \\ k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3 + \cdots + k_{3m}x_m & = & 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \\ k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + k_{n3}x_3 + \cdots + k_{nm}x_m & = & 0 \end{array}\right.$$

il possède une solution $(x_1, \ldots, x_m) \neq (0, \ldots, 0)$. Multiplions alors chaque réel nul $k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 + \cdots + k_{im}x_m$ par le vecteur v_i et additionnons le tout :

$$\begin{array}{l} k_{11}x_1\, v_1 + k_{12}x_2\, v_1 + k_{13}x_3\, v_1 + \cdots + k_{1n}x_n\, v_1 + \\ k_{21}x_1\, v_2 + k_{22}x_2\, v_2 + k_{23}x_3\, v_2 + \cdots + k_{2n}x_n\, v_2 + \\ k_{31}x_1\, v_3 + k_{32}x_2\, v_3 + k_{33}x_3\, v_3 + \cdots + k_{3n}x_n\, v_3 + \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ k_{n1}x_1\, v_n + k_{n2}x_2\, v_n + k_{n3}x_3\, v_n + \cdots + k_{nm}x_n v_n = 0 \end{array}$$

Rassemblons les termes de cette somme par colonnes, en mettant x_i en facteur de la $i^{\text{ème}}$ colonne. On obtient :

$$\begin{array}{l} x_1\left(k_{11}\, v_1 + k_{21}\, v_2 + k_{31}\, v_3 + \cdots + k_{n1}\, v_n\right) + \\ x_2\left(k_{12}\, v_1 + k_{22}\, v_2 + k_{32}\, v_3 + \cdots + k_{n2}\, v_n\right) + \\ x_3\left(k_{13}\, v_1 + k_{23}\, v_2 + k_{33}\, v_3 + \cdots + k_{n3}\, v_n\right) + \\ \vdots \\ x_m\left(k_{1m} v_1 + k_{2m} v_2 + k_{3m} v_3 + \cdots + k_{nm} v_n\right) = 0 \end{array}$$

donc, en vertu des relations $(*)$:

$$x_1\, w_1 + x_2\, w_2 + x_3\, w_3 + \cdots + x_m\, w_m = 0.$$

Puisque $(x_1, \ldots, x_m) \neq (0, \ldots, 0)$, on peut bien considérer le plus grand indice i tel que $x_i \neq 0$. Il ne peut s'agir de $i = 1$, car on aurait alors : $x_1 w_1 = 0$, ce qui est impossible du fait que $w_1 \neq 0$. On a donc : $x_1 w_1 + \cdots + x_{i-1} w_{i-1} + x_i w_i = 0$ pour notre indice $i \geqslant 2$, d'où :

$$w_i = -\frac{x_1}{x_i}\, w_1 - \cdots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\, w_{i-1}\,,$$

ce qui est absurde, puisque par hypothèse w_i n'est pas combinaison linéaire de $w_1, w_2, \ldots, , w_{i-1}$. Il résulte de cette contradiction que le sous-espace F de E est en fait finiment engendré.

□

Inventaire des exemples précédents d'espaces vectoriels réels.

Exemple 1 : $E = \mathbb{R}^n$ est finiment engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_{n-1} = (0, \ldots 0, 1, 0)$, $e_n = (0, \ldots 0, 1)$. En effet, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

La proposition ci-dessus entraîne que tout sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ est aussi finiment engendré.

Exemple 2 : $E = \mathbb{R}[x]$ n'est pas finiment engendré. En effet, toute combinaison linéaire de polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ est de degré au plus $k = \max(\deg P_1, \deg P_2, \ldots, \deg P_n)$, de sorte que par exemple le polynôme x^{k+1} n'est pas combinaison linéaire de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Cela établit que $\mathbb{R}[x]$ n'est engendré par aucun nombre fini de polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degrés au plus n, et qui est en lui-même — on le rappelle — un espace vectoriel, est finiment engendré par les polynômes $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Exemple 3 : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas finiment engendré. En effet, si l'on assimile chaque polynôme de $\mathbb{R}[x]$ à sa fonction polynôme associée (cf chapitre 3), $\mathbb{R}[x]$ devient un sous-espace de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}[x]$ n'est pas finiment engendré, la proposition précédente entraîne que l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne peut pas l'être non plus. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est en fait bien plus vaste que son sous-espace $\mathbb{R}[x]$. En revanche, son sous-espace $\mathcal{S}_1$ des solutions de l'équation différentielle : $x'(t) = a\,x(t)$ et son sous-espace $\mathcal{S}_2$ des solutions de l'équation différentielle : $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ sont finiment engendrés, comme on le verra plus bas en détail.

Exemple 4 : $E = \mathbb{C}$ est finiment engendré par ses vecteurs 1 et i. En effet, tout vecteur z de $\mathbb{C}$ est de la forme : $z = a.1 + b.i$ où $a, b \in \mathbb{R}$, autrement dit une combinaison linéaire de 1 et de i.

2.2 Bases d'espaces vectoriels

Définition On appelle *base* d'un espace finiment engendré E un n-uplet $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E tel que pour tout $v \in E$, il existe un *unique* n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaisant :

$$v = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Lorsque tel est le cas, on appelle pour tout $v \in E$, *coordonnées de v dans la base* $(u_1, \ldots, u_n)$ l'unique n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ comme ci-dessus.

Exemple 1 : $E = \mathbb{R}^n$. Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_{n-1} = (0, \ldots 0, 1, 0)$, $e_n = (0, \ldots 0, 1)$ forment une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, il y a un unique n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que :

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n) &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \\ &\big(= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \big)\end{aligned}$$

à savoir évidemment $(x_1, \ldots, x_n) = (a_1, \ldots, a_n)$.

Nouvelle notation des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Dans les calculs pratiques, il est souvent bien plus commode de représenter les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \ldots$ de $\mathbb{R}^n$ en colonnes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Ces représentations sont appelées *vecteurs colonnes* et constituent la variante la plus simple de *matrices*. Gardons en mémoire qu'il ne s'agit là que d'une *représentation* des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et non d'une nouvelle sorte d'objet mathématique. Dans cette notation, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots\ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : $E = \mathbb{R}_n[x]$ $(n \in \mathbb{N})$ a pour base $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}_n[x]$. En effet, tout vecteur $P(x)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ s'écrit de façon unique sous la forme : $P(x) = a_0.1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

Exemple 3 : $E = \mathcal{S}_1$, espace des solutions de l'équation différentielle : $x'(t) = a\,x(t)$ a pour base : (e^{at}) constituée de l'unique vecteur $t \mapsto e^{at}$. En effet, pour tout $x \in \mathcal{S}_1$, posons $\varphi(t) = e^{-at} x(t)$. On a alors : $\varphi'(t) = -a\,e^{-at} x(t) + e^{-at} x'(t) = -a\,e^{-at} x(t) + e^{-at} a\,x(t) = 0$, donc φ est une fonction constante, mettons $\varphi(t) = k$, d'où : $x(t) = \varphi(t)\,e^{at} = k\,e^{at}$. De plus, pour tout $k' \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = k' e^{at}$, on a : $k' = x(0) = k$, donc k est l'unique réel tel que $x(t) = k\,e^{at}$, (e^{at}) est bien une base de $\mathcal{S}_1$ et k l'unique coordonnée de $x(t) = k\,e^{at}$ dans cette base.

$E = \mathcal{S}_2$, espace des solutions de l'équation différentielle : $ax''(t)+bx'(t)+cx(t) = 0$ $(a \neq 0)$, vérifie la proposition suivante, que l'on admettra ici :

Proposition Soit $ax^2 + bx + c = 0 \in \mathbb{R}_2[x]$ $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de ce trinôme.

- Si $\Delta > 0$, alors ax^2+bx+c a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et toute solution de l'équation différentielle $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :
$$x(t) = k_1\, e^{r_1 t} + k_2\, e^{r_2 t}.$$
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ a une racine double r et toute solution de l'équation différentielle $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :
$$x(t) = k_1\, e^{rt} + k_2\, te^{rt}.$$
- Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ a deux racines complexes $r \pm \omega i$ et toute solution de l'équation différentielle $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :
$$x(t) = k_1\, e^{rt} \cos \omega t + k_2\, e^{rt} \sin \omega t.$$

Exemple 4 : $E = \mathbb{C}$ a pour base $(1, i)$. En effet, tout vecteur z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme : $z = a.1 + b.i$ où $a, b \in \mathbb{R}$, car alors $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Exemple 5 : Nous avons remarqué à la fin de la section précédente que l'ensemble des solutions $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un système linéaire homogène quelconque :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & a_{p3}x_3 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

constitue un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$. En résolvant le système comme dans le chapitre 4, on aboutit à un système exprimant chaque inconnue x_i en fonction de certaines d'entre elles (les inconnues qui ne sont pas "inconnues pivots", cf chapitre 4) utilisées comme paramètres. Il est alors toujours possible d'exprimer cette solution générale $(x_1, \ldots, x_n)$ comme une combinaison linéaire $x_{k_1}u_1 + \cdots + x_{k_p}u_p$ de vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, où $x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}$ sont précisément les composantes de $(x_1, \ldots, x_n)$ qui ont servi de paramètres. Il s'ensuit qu'on ne peut avoir $(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ pour d'autres coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ que ces composantes $x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}$. Ainsi, $(u_1, \ldots, u_p)$ est alors une base de l'espace F des solutions du système.

Par exemple, pour le système (S_3) de l'exemple 3 du chapitre 4, on a trouvé comme solution générale :

$$\left[\begin{array}{l} x = 5z + 3v \\ y = 2z - 2v \\ z = z \\ t = v \\ u = -2v \\ v = v. \end{array}\right.$$

On en déduit dans les nouvelles notations des vecteurs de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z+3v \\ 2z-2v \\ z \\ v \\ -2v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z \\ 2z \\ z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3v \\ -2v \\ 0 \\ v \\ -2v \\ v \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $\big((5, 2, 1, 0, 0, 0), (3, -2, 0, 1, -2, 1)\big)$ est une base de l'espace des solutions du système (S_3).

Concluons cette section 2 par deux théorèmes fondamentaux.

2.3 Le Théorème de la Base

Théorème de la base Tout espace vectoriel finiment engendré possède une base.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel finiment engendré quelconque. Il existe donc un nombre fini de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ tels que tout vecteur v de E est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$.

Supposons que $(v_1, \ldots, v_n)$ ne soit pas une base de E (dans le cas contraire, il n'y a plus rien à prouver). Alors il existe un vecteur v de E qui ne s'écrit pas de façon unique sous la forme : $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Puisque par hypothèse v a une telle forme, c'est qu'il en a une deuxième, mettons $v = x'_1 v_1 + \cdots + x'_n v_n$, et puisque celle-ci est bien distincte de la première, on a $x_k \neq x'_k$ pour un certain indice k. On peut alors écrire :

$$v - x_k v_k = x_1 v_1 + \cdots + x_{k-1} v_{k-1} + x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n$$

$$v - x'_k v_k = x'_1 v_1 + \cdots + x'_{k-1} v_{k-1} + x'_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x'_n v_n$$

et en faisant la différence de ces deux vecteurs :

$$(v - x_k v_k) - (v - x'_k v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n$$

où $\lambda_1 = x_1 - x'_1$, $\lambda_2 = x_2 - x'_2$, $\lambda_3 = x_3 - x'_3$ ... soit encore :

$$(x'_k - x_k)\, v_k = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Comme $x_k \neq x'_k$, $r = 1/(x'_k - x_k)$ est un réel bien défini. En multipliant les deux membres de la dernière égalité par r, on obtient :

$$v_k = r\lambda_1 v_1 + \cdots + r\lambda_{k-1} v_{k-1} + r\lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + r\lambda_n v_n.$$

Ainsi, v_k est combinaison linéaire des autres vecteurs v_i $(i \neq k)$. Comme ces derniers sont évidemment combinaisons linéaires d'eux-mêmes, tous les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ (y compris v_k) sont combinaisons linéaires des seuls vecteurs $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$. Puisque par hypothèse, tout $v \in E$ est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$, la proposition concluant la section 1.4 entraîne que tout $v \in E$ est combinaison linéaire des seuls vecteurs $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$.

Si $(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ n'est toujours pas une base de E, on peut répéter exactement le même raisonnnement et retirer un autre vecteur $v_{k'}$ de sorte que tout $v \in E$ soit encore combinaison linéaire des vecteurs v_i restants. Et ainsi de suite : tant que les vecteurs v_i restants ne forment pas une base, on peut toujours en retirer un de telle sorte que tout $v \in E$ soit encore combinaison linéaire des autres. Comme on ne peut pas retirer indéfiniment des vecteurs v_i (puisqu'ils sont en nombre fini), il faut bien que l'on aboutisse à un certain point à un ensemble de vecteurs v_i restants formant une base de E.

□

2.4 Le Théorème de la Dimension

Théorème de la dimension Deux bases quelconques d'un espace vectoriel finiment engendré ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_q)$ deux bases d'un même espace vectoriel. Exprimons les vecteurs de la seconde dans la première :

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & k_{11}\, u_1 + k_{21}\, u_2 + k_{31}\, u_3 + \cdots + k_{p1}\, u_p \\ v_2 & = & k_{12}\, u_1 + k_{22}\, u_2 + k_{32}\, u_3 + \cdots + k_{p2}\, u_p \\ v_3 & = & k_{13}\, u_1 + k_{23}\, u_2 + k_{33}\, u_3 + \cdots + k_{p3}\, u_p \\ & \vdots & \\ v_q & = & k_{1q}\, u_1 + k_{2q}\, u_2 + k_{3q}\, u_3 + \cdots + k_{pq}\, u_p \end{array} \qquad (*)$$

et considérons une solution quelconque $(x_1, \ldots, x_q)$ du système linéaire suivant :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} k_{11}x_1 & + & k_{12}x_2 & + & k_{13}x_3 & + & \cdots & + & k_{1q}x_q = 0 \\ k_{21}x_1 & + & k_{22}x_2 & + & k_{23}x_3 & + & \cdots & + & k_{2q}x_q = 0 \\ k_{31}x_1 & + & k_{32}x_2 & + & k_{33}x_3 & + & \cdots & + & k_{3q}x_q = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ k_{p1}x_1 & + & k_{p2}x_2 & + & k_{p3}x_3 & + & \cdots & + & k_{pq}x_q = 0 \end{array} \right. \qquad (S)$$

En multipliant pour $i = 1, 2, \ldots, n$ le membre gauche de la $i^{\text{ème}}$ équation du système par le vecteur u_i et en additionnant les n vecteurs nuls ainsi obtenus, on aboutit à :

$$\begin{array}{ccccccccc}
k_{11}x_1\,u_1 & + & k_{12}x_2\,u_1 & + & k_{13}x_3\,u_1 & + & \cdots & + & k_{1n}x_p\,u_1 & + \\
k_{21}x_1\,u_2 & + & k_{22}x_2\,u_2 & + & k_{23}x_3\,u_2 & + & \cdots & + & k_{2n}x_p\,u_2 & + \\
k_{31}x_1\,u_3 & + & k_{32}x_2\,u_3 & + & k_{33}x_3\,u_3 & + & \cdots & + & k_{3n}x_p\,u_3 & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
k_{p1}x_1\,u_p & + & k_{p2}x_2\,u_p & + & k_{p3}x_3\,u_p & + & \cdots & + & k_{pq}x_p\,u_p & = 0
\end{array}$$

Rassemblons par colonnes les termes de cette vaste somme. On remarque que l'on peut mettre x_i en facteur des termes de la $i^{\text{ème}}$ colonne. Cela donne :

$$\begin{array}{l}
x_1\left(k_{11}\,u_1 + k_{21}\,u_2 + k_{31}\,u_3 + \cdots + k_{p1}\,u_p\right) + \\
x_2\left(k_{12}\,u_1 + k_{22}\,u_2 + k_{32}\,u_3 + \cdots + k_{p2}\,u_p\right) + \\
x_3\left(k_{13}\,u_1 + k_{23}\,u_2 + k_{33}\,u_3 + \cdots + k_{p3}\,u_p\right) + \\
\vdots \\
x_q\left(k_{1q}\,u_1 + k_{2q}\,u_2 + k_{3q}\,u_3 + \cdots + k_{pq}\,u_p\right) = 0
\end{array}$$

c'est-à-dire, en vertu des relations $(*)$:

$$x_1\,v_1 + x_2\,v_2 + x_3\,v_3 + \cdots + x_q\,v_q = 0$$

Or $0 = 0\,v_1 + 0\,v_2 + 0\,v_3 + \cdots + 0\,v_q$ est *l'unique* expression du vecteur nul dans la base $(v_1, \ldots, v_q)$, donc $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$. Ainsi, le système (S) n'a pas d'autre solution que la solution nulle. Il s'ensuit que ce système possède au moins autant d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire : $p \geqslant q$. Si l'on reproduit ce raisonnement en intervertissant les rôles des bases $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_q)$, on obtient de même $q \geqslant p$. On a donc bien $p = q$.

□

Les deux théorèmes fondamentaux ci-dessus permettent de poser enfin la définition suivante :

Définition On appelle *dimension* d'un espace finiment engendré quelconque E, et l'on note : $\dim E$ le nombre de vecteurs de l'une quelconque de ses bases.

Ceci définit bien la dimension de n'importe quel espace finiment engendré, puisque tout espace finiment engendré a au moins une base d'après le théorème de la base, et que le nombre de ses vecteurs ne dépend pas du choix de la base d'après le théorème de la dimension.

Exemples. En reprenant les exemples précédents, on obtient immédiatement :
$\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, $\dim \mathcal{S}_1 = 1$, $\dim \mathcal{S}_2 = 2$, $\dim \mathbb{C} = 2$.

3 Familles libres & familles génératrices *(Notes de cours abrégées)*

3.1 Une décomposition de la notion de base

Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs quelconques d'un espace vectoriel E. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc}
\varphi : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & E \\
 & (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1u_1 + \cdots + x_pu_p
\end{array}$$

Par définition, $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base ssi pour tout $v \in E$, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = x_1u_1 + \cdots + x_pu_p = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$. Ainsi :

$$(u_1, \ldots, u_p) \text{ est une base } \iff \varphi \text{ est bijective.}$$

De même que la propriété de bijectivité se décompose naturellement en celles d'injectivité et de surjectivité, la notion de base s'analyse en posant :

$$(u_1, \ldots, u_p) \text{ est une famille } \textit{libre} \overset{\text{déf}}{\iff} \varphi \text{ est injective.}$$

$$(u_1, \ldots, u_p) \text{ est une famille } \textit{génératrice} \overset{\text{déf}}{\iff} \varphi \text{ est surjective.}$$

Ainsi, une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est *libre* ssi tout $v \in E$ s'écrit d'au plus une façon sous la forme $v = x_1u_1 + \cdots + x_pu_p$; elle est *génératrice* ssi tout $v \in E$ s'écrit (d'au moins une façon) sous la forme $v = x_1u_1 + \cdots + x_pu_p$ et c'est une base ssi elle est à la fois *libre* et *génératrice*.

3.2 Familles libres

Il existe une définition de famille libre équivalente à la précédente, plus simple à vérifier pour une famille $(u_1, \dots, u_p)$ donnée (mais dont le sens est moins clair) :

Définition On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *libre* si pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$:

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Commençons par vérifier l'équivalence de ces deux définitions : Supposons que $(u_1, \dots, u_p)$ est *libre* au sens de la section 3.1. Pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, si $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$, alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ ne peut être que l'*unique* expression $0\,u_1 + \cdots + 0\,u_p$ du vecteur 0 sous cette forme, d'où : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, et $(u_1, \dots, u_p)$ est donc bien libre au sens de la définition ci-dessus.
Réciproquement, supposons que $(u_1, \dots, u_p)$ est *libre* au sens de cette dernière définition. Si un quelconque vecteur v de E peut s'écrire : $v = x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p$ et encore : $v = x'_1 u_1 + \cdots + x'_p u_p$, alors : $(x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p) - (x'_1 u_1 + \cdots + x'_p u_p) = (x_1 - x'_1) u_1 + \cdots + (x_p - x'_p) u_p = 0$, donc en vertu de la définition ci-dessus : $x_1 - x'_1 = \cdots = x_p - x'_p = 0$, d'où : $x_1 = x'_1, \dots, x_p = x'_p$. Autrement dit, les expressions $x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p$ et $x'_1 u_1 + \cdots + x'_p u_p$ sont une seule et même expression, de sorte que v s'exprime sous cette forme de façon unique.

Définition On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *liée* si elle n'est pas libre, autrement dit s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \text{ et pourtant } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0),$$

c'est-à-dire encore s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *non tous nuls* tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$.

Exemples simples. – Tout vecteur $u \neq 0$ forme une famille libre, car alors : $\lambda u = 0 \implies \lambda = 0$.
– Le vecteur 0 est le seul vecteur lié à lui tout seul, car par exemple : $1.0 = 0$.
– Deux vecteurs colinéaires u, v sont liés, car alors soit $u = kv$ (et donc $1\,u - k\,v = 0$), soit $v = ku$ (et donc $k\,u - 1\,v = 0$).
– Deux vecteurs non colinéaires u, v sont libres, car si $\lambda u + \lambda' v = 0$, alors $\lambda = 0$ (sinon $u = -(\lambda'/\lambda)\,v$) et $\lambda' = 0$ (sinon $v = -(\lambda/\lambda')\,u$).

Mais attention !!! $u_1, \dots, u_n$ non colinéaires $\not\Longrightarrow$ $(u_1, \dots, u_n)$ famille libre.

Par exemple, les vecteurs $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$ et $u_3 = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas colinéaires, et pourtant $1\,u_1 + 1\,u_2 - 1\,u_3 = 0$, donc la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

Définition On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de E est *libre maximale* si elle est libre, et si quel que soit le vecteur $v \in E$ que l'on tente d'y rajouter, la famille $(u_1, \dots, u_p, v)$ devient liée.

Proposition Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de E est *libre maximale* ssi c'est une *base* de E.

Démonstration. (Cf cours du 05/11/2010.)

□

3.3 Familles génératrices

Rappelons la définition de la section 3.1 :

Définition On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ d'un espace vectoriel E est *génératrice* si tout vecteur $v \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$.

Définition On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ d'un espace vectoriel E est *génératrice minimale* si elle est génératrice, et si quel que soit le vecteur $u_i \in E$ que l'on tente de lui ôter, la famille obtenue $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p)$ n'est plus génératrice.

Proposition Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ d'un espace E est *génératrice minimale* ssi c'est une *base* de E.

Démonstration. (Cf cours du 10/11/2010.)

□

Remarque. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ d'un espace E, l'ensemble F des combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_p$ est un sous-espace de E, car $0 = 0\,u_1 + \cdots + 0\,u_p \in F$, la somme de deux combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_p$ est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$ et le produit d'une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$ par un réel k est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$. Cela fonde la définition suivante qui suit.

Définition Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle *sous-espace engendré par* $(u_1, \ldots, u_p)$, et l'on note $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, le sous-espace des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$.

Remarque importante. Ainsi, toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ d'un espace E est génératrice du sous-espace $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ de E, qui est en lui-même un espace vectoriel. Autrement dit, toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice d'un certain espace vectoriel. C'est pourquoi, plutôt que de dire que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice (de quoi ?), il vaut mieux préciser que $(u_1, \ldots, u_p)$ *est une famille génératrice de* E (si c'est bien sûr le cas), ou encore que $(u_1, \ldots, u_p)$ *engendre* E.
La notion de famille libre ne pose pas le même problème, car une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ d'un espace E reste libre dans n'importe quel espace contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, de par la définition même de famille libre.

3.4 Conclusion

Théorème de la base incomplète Soit E un espace vectoriel, $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de E et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de E. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ (la "base incomplète") peut être complétée en une base, en lui rajoutant certains des vecteurs de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$.

Démonstration. (Cf cours du 10/11/2010.) □

Corollaire Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E, alors : $\dim F \leqslant \dim E$.

Théorème Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille quelconque de vecteurs de E. Les hypothèses suivantes sont alors équivalentes :

- $\mathscr{F}$ est une base de E
- $\mathscr{F}$ est une famille libre et génératrice de E
- $\mathscr{F}$ est une famille libre maximale de E
- $\mathscr{F}$ est une famille génératrice minimale de E
- $\mathscr{F}$ est une famille libre de E et $n = \dim E$
- $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E et $n = \dim E$.

Démonstration. (Cf cours du 10/11/2010.) □