Université
PARIS DIDEROT
Paris 7

LICENCE SCIENCES ET APPLICATIONS
ANNÉE L1

51MM1MT1
Section E

Chapitres 1 à 5

Année universitaire 2009-2010

Département de formation de Sciences exactes
Bâtiment Condorcet – 1er étage.

Table des matières

Chapitre 1. Identités et inégalités remarquables **1**

§ 1. Les identités remarquables du collège 1
§ 2. La formule du binôme de Newton 3
§ 3. Progressions géométriques, série géométrique 7
§ 4. Autres identités classiques 10
§ 5. L'inégalité arithmético-géométrique 12
§ 6. Autres inégalités classiques 14
Exercices 16

Chapitre 2. L'espace **23**

§ 1. Points et vecteurs 24
§ 2. Bases et repères. Coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'un point 29
§ 3. E, $\overrightarrow{E}$ et $\mathbb{R}^3$ 31
§ 4. Le problème du changement de repère en dimension 2 32
§ 5. Barycentre 37
§ 6. Définition des droites et des plans 40
§ 7. Produit scalaire, norme, distance 49
Exercices 55

Chapitre 3. Retour sur la géométrie plane **59**

§ 1. Retour sur la solution de deux problèmes classiques 59
§ 2. La géométrie du collège 63
§ 3. Notions affines. Notions métriques 67

Chapitre 4. Déterminants en dimension 3 **69**

§ 1. Changement de base et déterminant en dimension 3 69
§ 2. Application à quelques problèmes de géométrie analytique plane . . 80
Exercices 82

Chapitre 5. Équations des droites et des plans **85**

§ 1. Les deux modes de représentation d'une droite ou d'une courbe du plan 85
§ 2. Parallélisme et intersection 97
§ 3. Diverses façons de déterminer l'équation d'une droite du plan et autres problèmes 104
§ 4. Forme métrique de l'équation d'une droite 108

§ 5. Forme métrique de l'équation d'un plan. Projection orthogonale . . . 109
§ 6. Orthogonalité. Plans perpendiculaires 113

Chapitre 1

Identités et inégalités remarquables

§ 1. Les identités remarquables du collège

1. Une égalité toujours vraie s'appelle une identité : par exemple

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Quand on dit « toujours vraie », on veut dire « vraie quelles que soient les valeurs des variables a et b ». Et comme nos variables sont des variables réelles, cela peut aussi se dire « quels que soient les réels a et b ».

Détaillons la démonstration :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{(définition du carré)}\\
&= a(a+b) + b(a+b) && \text{(distributivité à droite : } (a+b)x = ax+bx)\\
&= aa + ab + ba + bb && \text{(distributivité à gauche : } x(a+b) = xa+xb,\\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad \text{appliquée deux fois)}\\
&= aa + ab + ab + bb && \text{(commutativité de la multiplication : } ba = ab)\\
&= aa + 2ab + bb
\end{aligned}$$

On a utilisé sans la mentionner une autre propriété, l'associativité de l'addition : c'est la propriété $(a+b)+c = a+(b+c)$. Pour fixer les idées : $(17+29)+31 = 46+31 = 77, 17+(29+31) = 17+60 = 77$. C'est le fait que l'addition soit associative qui permet d'écrire sans parenthèses des sommes d'un nombre quelconque de termes comme $17+29+31$ ou $a+b+c+d+e$: quelle que soit la façon de grouper deux par deux les termes pour les additionner, puis de grouper les résultats et ainsi de suite, on obtient toujours le même résultat. On voit qu'il est difficile de donner des démonstrations vraiment « complètes ».

2. Ce que nous voulions souligner, en réalité, c'est que l'identité est une conséquence des règles très simples qui gouvernent l'addition et la multiplication des nombres réels. On n'a pas besoin de savoir ce que c'est qu'un nombre réel, ni de connaître les autres propriétés des nombres réels : c'est pourquoi on peut en donner une démonstration purement « formelle », à la portée des calculettes et des ordinateurs d'aujourd'hui. Je peux vous garantir qu'un ordinateur ne sait pas ce que c'est qu'un nombre réel, alors qu'il peut « apprendre » les trois ou quatre règles qui gouvernent l'addition et la multiplication.

Par contre, pour démontrer par exemple le théorème des valeurs intermédiaires, il faut avoir bien compris ce qu'est un nombre réel.

3. Autres identités. On connaît aussi les identités

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

(on obtient cette identité à partir de la précédente en remplaçant b par $-b$) et

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(démonstration : $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$).

Aux trois identités classiques, il faut en ajouter une quatrième,

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2,$$

où i désigne le nombre complexe bien connu. Elle s'obtient en remplaçant dans la précédente b par ib.

4. À quoi servent les identités remarquables ? On peut se servir des deux premières identités pour calculer le carré d'une somme ou d'une différence, ce sont des calculs qui reviennent souvent, ou de la troisième pour calculer très vite 102×98. mais l'utilisation la plus intéressante consiste à utiliser les identités à l'envers, par exemple pour reconnaître qu'une certaine expression est un carré.

Par exemple, on reconnaît, en prenant $a = x$ et $b = 2$ que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. On en déduit que $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$ pour tout x réel.

Instruit par cet exemple, on observe que $x^2 - 4x + 5$ n'est pas un carré, mais presque :

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x-2)^2 + 1.$$

On peut en déduire, par exemple, $x^2 - 4x + 5 > 0$ pour tout x réel.

Considérons l'équation

$$x^2 + 6x + 7 = 0.$$

On reconnaît un carré non pas dans $x^2 + 6x + 7$, mais dans $x^2 + 6x + 9$ (en prenant $a = x$, $b = 3$). Autrement dit, on reconnaît que $x^2 + 6x$ est le début d'un carré, le début de $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Grâce à cette information, on peut réécrire l'équation donnée sous la forme équivalente

$$(x+3)^2 - 2 = 0.$$

C'est là qu'intervient une autre identité remarquable. Il faut se forcer un peu, mais on doit se souvenir que 2, comme tout nombre réel positif est un carré (c'est-à-dire le carré d'un autre nombre réel). L'équation donnée prend donc la forme

$$(x+3)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0.$$

On peut donc appliquer à l'envers l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, avec $a = x+3$, $b = \sqrt{2}$, et réécrire encore une fois l'équation donnée :

$$(x + 3 + \sqrt{2})(x + 3 - \sqrt{2}) = 0$$

On dit qu'on a *factorisé* le premier membre de l'équation.

La résolution de l'équation repose ainsi sur deux identités prises à l'envers. Et chaque fois, il a fallu modifier légèrement l'expression étudiée pour que l'identité puisse s'appliquer.

On garde pour plus tard l'identité $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$. Indiquons pour le moment qu'on peut dire sans exagérer que les nombres complexes ont précisément été inventés pour factoriser les expressions du type $a^2 + b^2$.

Reconnaître comme cela des schémas dans une expression, quitte à modifier l'expression donnée pour qu'elle s'adapte mieux au schéma, en vue d'appliquer un résultat connu, l'humanité sait le faire depuis 4000 ans. C'est le gros du travail des étudiants en mathématiques : aucun résultat ne s'applique jamais directement, ce serait trop facile. Et depuis 20 ou 25 ans, les ordinateurs parviennent à le faire dans des situations qu'on peut décrire à la fois comme simples et compliquées : les expressions à traiter peuvent être très compliquées, du moment que le nombre de règles à appliquer reste limité.

Un être humain, un mathématicien ou un étudiant en mathématiques, par contre, traitera des situations plus simples, mais il aura à mobiliser l'ensemble de ses connaissances, parfois de façon inattendue, comme des connaissances d'analyse, de géométrie ou même de physique dans la résolution d'un problème d'apparence purement algébrique (voir n° 24). C'est un peu ce qui distingue la démonstration du calcul, mais qu'on ne se méprenne pas : le calcul lui aussi peut demander intelligence, capacité d'observation et imagination.

§ 2. La formule du binôme de Newton

5. Ce paragraphe et le suivant sont consacrés aux identités qui généralisent les identités remarquables du collège, et fournissent des expressions pour $(a \pm b)^n$ et $a^n - b^n$ (n entier $\geqslant 2$).

6. Des calculs similaires aux précédents conduisent aux identités

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Ces exemples nous conduisent à soupçonner qu'il y a une loi générale pour $(a+b)^n$. C'est bien le cas, on a

(1)
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

où $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, et où les autres coefficients sont des entiers > 0, donnés par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \tag{2}$$

(la formule est en fait valable pour $k = 0$: on considère que le produit de *zéro* facteurs entiers > 0 est égal à 1).

La formule (1) porte le nom de *formule du binôme de Newton*, et les coefficients $\binom{n}{k}$ sont appelés les *coefficients du binôme*. La notation $\binom{n}{k}$ se lit « k dans n » ou « binôme n k » (en anglais « *n choose k* ») ou « n k ». On emploie aussi la notation C_n^k (attention : $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$).

En notation condensée, la formule (1) s'écrit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{3}$$

(on convient que $a^0 = b^0 = 1$ même si a ou b est nul).

Nous allons maintenant démontrer soigneusement la formule du binôme.

Démonstration. Observons pour commencer comment on développe un produit de deux sommes d'un nombre quelconque de termes comme

$$\mathrm{P} = (a_1 + \cdots + a_p)(b_1 + \cdots + b_q).$$

Puisque

$$\mathrm{P} = a_1(b_1 + \cdots + b_q) + \cdots + a_p(b_1 + \cdots + b_q),$$

on voit que l'expression développée de P est la somme de pq termes, qui sont tous les produits $a_i b_j$ qu'on obtient en choisissant un terme dans le premier facteur et un terme dans le second.

De même,

$$\mathrm{Q} = (a_1 + \cdots + a_p)(b_1 + \cdots + b_q)(c_1 + \cdots + c_r).$$

est la somme de pqr produits $a_i b_j c_k$ qui s'obtiennent en choisissant un terme dans le premier facteur, un terme dans le second et un terme dans le troisième.

L'expression

$$\mathrm{R} = (a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

se développe de la même façon (à ceci près qu'on a maintenant un nombre quelconque de facteurs, et en revanche deux termes seulement dans chaque facteur) : R est la somme de tous les produits qu'on obtient en choisissant dans chacun des n facteurs soit a soit b (soit $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ produits). Chacun de ces produits comporte un certain nombre de fois, disons k, le facteur b et par conséquent $n-k$ fois le facteur a. Par exemple, dans le développement de $(a+b)^5$ figurent les produits $aaabb$, $aabab$, $aabba$, etc., tous égaux à a^3b^2. Le nombre de termes égaux à a^3b^2 est justement ce que nous avons noté $\binom{5}{3}$. Avec un peu de soin, on vérifie que $\binom{5}{3} = 10$.

Démontrer la formule du binôme revient donc à calculer $\binom{n}{k}$. C'est le nombre de façons différentes de choisir les k facteurs dans lesquels on prendra un b. Autrement dit, c'est le nombre de façons de choisir k nombres (les numéros des facteurs où on prendra un b) parmi $1, 2, \ldots, n$. C'est encore, puisque le fait qu'il s'agisse de nombres est visiblement sans importance, le nombre de façons de choisir un sous-ensemble de k objets dans un ensemble de n objets. Comptons les façons de faire ce choix. Pour choisir le premier objet, on a n possibilités, pour choisir le second, il n'y en a plus que $n-1$, ..., pour choisir le k-ième, il y en a $n-(k-1)$, puisque $k-1$ objets ont déjà été choisis. Soit finalement

$$n(n-1)\ldots(n-(k-1))$$

façons de faire le choix. Mais ces choix ne mènent pas tous à des sous-ensembles différents : si dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on choisit 3 puis 7 puis 2, ou 2 puis 3 puis 7, ou 2 puis 7 puis 3, on obtient le même sous-ensemble $\{2, 3, 7\}$. En général, il y a autant de choix qui conduisent au même sous-ensemble à k éléments qu'il y a d'ordres possibles dans un ensemble à k éléments. Comptons ces ordres possibles : pour définir un ordre, on désigne d'abord le premier éléments (k possibilités), puis le second ($k-1$ possibilités), ..., puis le k-ième et dernier (une seule possibilité). Donc $k(k-1)\ldots 1 = k!$ ordres possibles. En choisissant les objets un par un comme on l'a fait ci-dessus, on obtient donc $k!$ fois chacun des sous-ensembles à k éléments. Le calcul que nous avons fait donne un résultat $k!$ fois trop grand. Finalement, le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

(on a écrit $n-k+1$ au lieu de $n-(k-1)$). □

7. *Mnémotechnique pour l'expression de* $\binom{n}{k}$ *:* il y a autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur, c'est-à-dire k.

8. Relation de récurrence entre les coefficients du binôme (formule de Pascal). Pour calculer en pratique les coefficients du binôme pour $n = 5, 6, 7$, on n'utilise jamais la formule (2), mais la relation de récurrence

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \tag{4}$$

valable pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Sur le tableau ci-dessous, qu'on appelle *triangle de Pascal*, cette relation signifie que chaque élément est la somme de l'élément situé juste au-dessus et de l'élément situé à la droite de celui-ci (là où il n'y rien on compte 0, cela rend la relation valable pour $k = 0$ ou n, auquel cas la relation s'écrit simplement $0 + 1 = 1$, ou $1 + 0 = 1$) :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	□	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Tab. 1. Le triangle arithmétique de Pascal

Démonstration de la relation (4). *Première méthode.* Pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\times k}{k!} \\
&\qquad\qquad\text{(en réduisant au même dénominateur)} \\
&= \frac{\big((n-k)+k\big)(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode. Par définition, $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets $a_1, a_2, \dots, a_n$ (on peut appeler ces n objets comme on veut). Comptons-le nombre de choix possible d'une autre manière, en faisant jouer un rôle particulier au dernier objet, a_n. Pour choisir k objets, on peut les prendre tous parmi $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, ou bien on peut en prendre $k-1$ parmi $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, et ajouter a_n. Il y a $\binom{n-1}{k}$ façons d'obtenir k objets de la première manière, $\binom{n-1}{k-1}$ de la seconde, $\binom{n}{k}$ au total. □

Exercices. 1. Écrire la ligne $n = 12$ du triangle de Pascal. Calculer $\binom{14}{7}$.

2. Faire sur le triangle de Pascal quelques observations sur les propriétés de parité et de divisibilité des coefficients du binôme. Essayez de démontrer que ces propriétés sont vraies en général.

3. Sur une copie du triangle de Pascal, entourer d'un cercle les multiples de 5, ou les multiples de 7. Qu'observe-t-on ?

9. Symétrie des coefficients du binôme. De la formule (2), on tire en multipliant le numérateur et le dénominateur du second membre par $(n-k)! = (n-k)\dots 2.1$ la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{5}$$

On en déduit immédiatement que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Les coefficients du binôme sont symétriques par rapport à $n/2$.

On peut aussi déduire cette propriété de symétrie du fait que a et b jouent le même rôle dans $(a+b)^n$, ou encore la démontrer en représentant le triangle de Pascal sous la forme

n												
0							1					
1						1		1				
2					1		2		1			
3				1		3		3		1		
4			1		4		6		4		1	
5		1		$\boxed{5}$		$\boxed{10}$		$\boxed{10}$		$\boxed{5}$		1
6	1		6		$\boxed{15}$		20		$\boxed{15}$		6		1

Tab. 2. Le triangle de Pascal (disposition symétrique)

§ 3. Progressions géométriques, série géométrique

10. L'identité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ possède une généralisation facile (et importante) :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{6}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&\qquad = a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&\qquad\quad - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&\qquad = a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\
&\qquad\quad - a^{n-1}b - \cdots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\
&\qquad = a^n - b^n.
\end{aligned}$$

(on a veillé à placer les uns en-dessous des autres les termes qui se compensent). □

Exercice. Rédiger cette démonstration en utilisant la notation $\sum$.

11. Il n'y pas de formule analogue pour $a^n + b^n$ (il n'y en a pas pour $a^2 + b^2$, sauf à faire intervenir les complexes). Toutefois, *si n est impair*, on peut remplacer b par $-b$ dans la formule (6), pour obtenir

(7)
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^k a^{n-k-1}b^k + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

12. Somme des termes d'une progression géométrique. On rappelle qu'une *progression géométrique* est une suite finie ou infinie dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un nombre constant, appelé la *raison* de la progression géométrique considérée.

Exemples : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 (raison 2) ; 1, 1/2, 1/4, 1/8 (raison 1/2).

Si on note q la raison de la progression géométrique et a le premier terme, une progression géométrique (infinie pour simplifier) s'écrit

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$$

La somme des $n+1$ premiers termes d'une progression géométrique est donnée par la formule

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{8}$$

(on suppose $q \neq 1$). La démonstration est immédiate : on applique la formule (6) ci-dessus en remplaçant n par $n+1$ et en prenant $a = 1, b = q$. On obtient

$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^n).$$

et le résultat en découle. *Mnémotechnique :*

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \underbrace{a}_{\text{terme initial}}\ \frac{\overbrace{1-q^{n+1}}^{\text{nombre de termes}}}{\underbrace{1-q}_{\text{raison}}}$$

13. Somme des termes d'une progression géométrique infinie. On peut aussi dans certains cas donner un sens à la somme des termes d'une progression géométrique infinie. Supposons pour simplifier $a = 1$. On pose par définition

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

lorsque la limite existe. Si la limite n'existe pas, l'expression au premier membre n'est pas définie.

L'expression

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

s'appelle *série géométrique de raison q et de terme initial* 1.

Au lieu d'écrire $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ on peut aussi écrire $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. D'ailleurs

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n$$

Supposons $q \neq 1$. On sait que dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n = \frac{1 - q^{\mathrm{N}+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} q^{\mathrm{N}}.$$

On a vu en Terminale que

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} q^{\mathrm{N}} = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ +\infty \text{ ou n'existe pas} & \text{si } |q| \geqslant 1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \\ +\infty \text{ ou n'existe pas} & \text{si } |q| \geqslant 1 \end{cases}$$

Remettons en place le premier terme a (il suffit de tout multiplier par a), et énonçons le résultat obtenu.

14. Théorème. *La somme infinie $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ est définie si $-1 < q < 1$, et seulement dans ce cas. Sa valeur est alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \tag{9}$$

Exemples :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1,$$
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}.$$

Exercices. 1. Quel rapport y a-t-il entre la dernière formule et le fait que $1/9 = 0{,}111111\ldots$?

2. Montrer que le nombre réel $5{,}3636363636\ldots$ est rationnel et donner son expression sous forme de fraction.

§ 4. Autres identités classiques

15. Des inégalités intéressantes et utiles, qui méritent qu'on les retienne, il y en a très peu. Si vous multipliez deux expressions quelconques $(a + 2b)(a + b) = a^2 + 3ab + 2b^2$, cela vous fait bien sûr une identité, mais il n'y a aucune raison de la retenir : s'il vous arrive de devoir factoriser l'expression $x^2 + 3xy + 2y^2$, vous y arriverez en vous servant uniquement des identités du collège :

Première étape : on reconnaît que $x^2 + 3xy$ ressemble au début d'un carré, à a^2+2ab si on pose $x = a, b = \frac{3}{2}y$. Puisque $a^2+2ab = (a+b)^2$ (le carré complet)$-b^2$, on aura de la même façon $x^2 + 3xy = (x + 3y)^2 - \left(\frac{3}{2}y\right)^2$.

Deuxième étape : le terrain est préparé pour pouvoir appliquer l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. On peut en effet écrire

$$\begin{aligned}
x^2 + 3xy + 2y^2 &= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 \\
&= (x + 3y)^2 - \frac{1}{4}y^2 \\
&= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 && \text{(on achève de préparer le terrain)} \\
&= \left(x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y\right)\left(x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y\right) && \text{(on applique l'identité } a^2 - b^2 = \ldots
\end{aligned}$$

d'où, en arrangeant un peu, le résultat cherché :

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = (x + 2y)(x + y).$$

Exercice. Écrire $x^4 + x^2 + 1$ sous la forme du produit de deux polynômes du second degré.

16. Carré et cube d'une somme. Il existe une généralisation de la formule du binôme au cas où on remplace $a + b$ par une somme d'un nombre quelconque de termes. Mais elle est compliquée à énoncer et rarement utilisée. Il est plus utile de savoir calculer rapidement le carré et le cube d'une somme.

Au lieu de noter comme on le fait aujourd'hui $a_1 + \cdots + a_p$ une somme d'un nombre quelconque de termes, on peut l'écrire $a + b + c + \cdots + z$, comme faisait Euler, ou $\sum a$ (sous-entendu : somme de a et d'un certain nombre de grandeurs similaires), comme faisait mon professeur de Mathématiques spéciales, M. Saint-Jean. Avec cette dernière notation, on a

$$\left(\sum a\right)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab,$$

ce qui signifie somme des carrés plus somme des doubles produits. Démonstration : on écrit

$$(a + b + c + \cdots)^2 = (a + b + c + \cdots)(a + b + c + \cdots)$$

et on observe que a^2 et les monômes du même type vont se retrouver une fois dans le produit, tandis que ab va se retrouver deux fois : une fois pour ab, une fois pour ba.

De même, en examinant comment s'effectue le produit

$$(a+b+c+\cdots)^3 = (a+b+c+\cdots)(a+b+c+\cdots)(a+b+c+\cdots),$$

on arrive à la formule

$$\left(\sum a\right)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2 b + 6abc.$$

17. Identités déduites des identités remarquables. En soustrayant

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

on obtient la formule

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$

qui permet de calculer les produits si on sait calculer les carrés.

Si on remplace a par a^2 et b par b^2, on obtient

$$(a^2+b^2)^2 = (2ab)^2 + (a^2-b^2)^2$$

En remplaçant a et b par des entiers quelconques, on obtient une infinité de triangles rectangles à côtés entiers : pour $a = 2, b = 1$ on trouve $5^2 = 4^2 + 3^2$; pour $a = 3, b = 2$ on trouve $13^2 = 12^2 + 5^2$, etc.

18. Identités de Lagrange Voici maintenant à titre d'exercice quelques inégalités moins classiques (il est inutile de les connaître, elles ne sont pas au programme).

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = \begin{cases} (aa'+bb')^2 + (ab'-ab')^2 \\ (aa'-bb')^2 + (ab'+ba')^2 \end{cases} \tag{10}$$

(11)

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) = (aa'+bb'+cc')^2 + (bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ab')^2$$

(identité de Fibonacci ou de Brahmagupta pour les deux premières, identité de Lagrange pour la troisième). Ces identités peuvent bien entendu se vérifier en développant et en ordonnant les deux membres, et en constatant qu'on a à faire à des expressions identiques. Mais il est plus intéressant de savoir de quelles situations géométriques proviennent ces identités. On y reviendra quand nous parlerons respectivement des angles, des nombres complexes et du produit vectoriel.

19. Quelques curiosités. Enfin, à titre de simples curiosités :

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)&(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\ &=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2\\ &\qquad+(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2\end{aligned}$$

(identité des quatre carrés d'Euler),

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2ac+2bd)^2+(2ad-2bc)^2$$

(identité de Lebesgue),

$$(b-c)^2+(b+c)^2+2(b-c)^2=(b^4-2b^2c^2+c^4)\Big(\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{b^2-c^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\Big)$$

(identité de Chrystal, 1886).

Exercices. 1. Démontrer ou vérifier l'identité

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4).$$

2. Même question pour

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

§ 5. L'inégalité arithmético-géométrique

20. On appelle *identités* les égalités toujours vraies. On dit par exemple qu'on a l'identité $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et qu'on a l'égalité $a^2=b^2+c^2$ lorsque a, b, c sont les côtés d'un triangle rectangle, a étant l'hypoténuse. Par contre, il n'y a pas de terme pour désigner les inégalités « toujours vraies ». Ce n'est pas très gênant.

21. L'inégalité de base est $a^2 \geqslant 0$. Ou $a^2+b^2+c^2 \geqslant 0$. Une méthode générale pour montrer que $\mathrm{P} \geqslant \mathrm{Q}$ consiste à montrer que $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ est un carré ou une somme de carrés. Comme ce qu'on vient de dire le laisse supposer, toutes les constantes et toutes les variables considérées dans cette section sont réelles (alors que cette hypothèse est toujours inutile pour ce qui concerne les *égalités* algébriques).

22. Commençons par la plus simple et la plus utile des « inégalités remarquables » : si a et b sont $\geqslant 0$, on a

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}. \tag{12}$$

Démonstration : $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \geqslant 0$. Autre rédaction : En multipliant par 2 et élevant au carré, on obtient l'inégalité équivalente $4ab \leqslant (a+b)^2$, laquelle est à son tour équivalente à $(a-b)^2 \geqslant 0$.

23. On sait que $\mathrm{A} = \frac{a+b}{2}$ est la *moyenne arithmétique* des réels a et b. On dit que $\mathrm{G} = \sqrt{ab}$ est la *moyenne géométrique* de a et b. On peut justifier l'emploi dans ce cas du terme « moyenne » en observant que il revient au même d'ajouter à un nombre a, puis b, ou d'ajouter deux fois A. De même, il est équivalent de multiplier un nombre par a, puis par b ou de le multiplier deux fois par G. Quand aux adjectifs « arithmétique » et « géométrique », il correspondent bien, comme dans le cas des progressions arithmétiques et géométriques, le premier à l'emploi de l'addition, le second à l'emploi de la multiplication. On pourrait appeler A moyenne additive et G moyenne multiplicative (mais on ne le fait pas).

L'inégalité $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ s'appelle l'*inégalité arithmético-géométrique*.

Mnémotechnique. A-t-on $\mathrm{G} \leqslant \mathrm{A}$ ou est-ce dans l'autre sens ? On a souvent un doute au moment d'appliquer la formule. Le mieux est d'essayer sur un cas très simple : 9 et 11 par exemple. Mieux encore : 0 et 1.

Exercice. Quand a-t-on égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique ? Y a-t-il un rectangle de périmètre p donné de plus grande aire ? de plus petite aire ?

Exercice. *Moyenne harmonique, moyenne quadratique.* On définit aussi la moyenne harmonique H de a et b : par définition, $1/\mathrm{H}$ est la moyenne (arithmétique) de $1/a$ et $1/b$. On définit de même la moyenne quadratique Q : Q^2 est la moyenne arithmétique de a^2 et b^2. On peut en fait associer une « moyenne » à n'importe quelle fonction f continue strictement monotone, en définissant M par la relation $f(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$. Pour $f(x) = x$, on retrouve la moyenne arithmétique, pour $f(x) = \log x$ la moyenne géométrique, pour $f(x) = 1/x$, la moyenne harmonique, pour $f(x) = x^2$ la moyenne quadratique. (Les moyennes arithmétiques, géométrique et harmonique ont été introduites par Pythagore de Samos (né en 580 av. J.-C. env., m. en -497 av. J.-C.). La moyenne quadratique joue un rôle important en probabilités et en statistique.)

On demande de démontrer les inégalités en chaîne ci-dessous, où $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux nombres a et b et $\max(a, b)$ le plus grand :

$$\min(a, b) \leqslant \mathrm{H} \leqslant \mathrm{G} \leqslant \mathrm{A} \leqslant \mathrm{Q} \leqslant \max(a, b).$$

Montrer que si deux de ces nombres sont égaux, on a $a = b$, et ils le sont tous.

24. Dans le cas des moyennes arithmétique et géométrique de trois réels > 0, l'inégalité arithmético-géométrique s'écrit

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

Démontrons cette inégalité. Une première idée serait de montrer que $27abc \leqslant (a+b+c)^3$ pour $a, b, c \geqslant 0$, ou, ce qui revient au-même $27x^2y^2z^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)^3$ quels que soient les réels x, y, z. Il faudrait donc prouver que $(x^2+y^2+z^2)^3 - 27x^2y^2z^2$ est un carré ou une somme de carrés. Cela semble impraticable, et on va plutôt passer par l'analyse.

En prenant les logarithmes des deux membres, on voit que l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$\frac{1}{3}(\log a + \log b + \log c) \leqslant \log \frac{1}{3}(a+b+c).$$

Interprétons cette inégalité au moyen du graphe de la fonction $y = \log x$. Le point G de coordonnées $X = \frac{1}{3}(a + b + c)$, $Y = \frac{1}{3}(\log a + \log b + \log c)$, est le centre de gravité du triangle ABC, où $A = (a, \log a)$, $B = (b, \log b)$, $C = (c, \log c)$. L'inégalité revient à dire que $Y \leqslant \log X$, autrement dit que le centre de gravité du triangle ABC est situé sous le graphe $y = \log x$. Mais les points A, B, C sont situés sur ce graphe, cette propriété est évidente sur la figure :

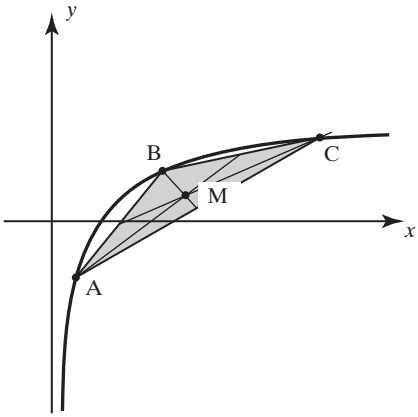

Fig. 1. Démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique dans le cas de trois variables

Exercices. 1. Montrer que pour a et $b > 0$ on a

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

2. *a*) Montrer que pour x et $y \geqslant 0$ on a $(x + y)^2 \geqslant 4xy$.

b) Montrer que pour $a, b, c \geqslant 0$ on a $(b + c)(c + a)(a + b) \geqslant 8abc$.

c) En déduire que $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

3. Montrer que pour tout réel $a > -1$ et tout entier $n > 0$ on a $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (inégalité de Bernoulli). *Remarque.* Pour $a \geqslant 0$, c'est facile, avec la formule du binôme, mais pour $-1 < a < 0$?

§ 6. Autres inégalités classiques

25. Inégalité de Cauchy. L'inégalité de Cauchy s'énonce

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \tag{13}$$

$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ réels).

Pour $n = 2$ et $n = 3$, elle se déduit immédiatement des inégalités de Fibonacci (10) et de Lagrange (11).

L'inégalité de Lagrange pour n quelconque existe, mais elle est extrêmement compliquée. On peut démontrer l'inégalité de Cauchy bien plus rapide-

ment grâce à une petite astuce. Supposons[1] $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$ (dans le cas contraire, l'inégalité est vérifiée trivialement, comme on dit) et posons

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + x b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \end{aligned}$$

Puique $b_1^2 + \cdots + b_n^2 > 0$, il s'agit d'un polynôme du second degré en x, toujours $\geqslant 0$. Son discriminant $\Delta = 4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 - 4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)$ est donc $\leqslant 0$ et l'inégalité (13) en résulte immédiatement.

On a égalité dans l'inégalité de Cauchy si $\Delta = 0$, autrement dit s'il existe un réel x tel que $\mathrm{P}(x) = 0$, ou, en remplaçant x par $-\alpha$, s'il existe un réel α tel que $(a_1, \dots, a_k) = \alpha(b_1, \dots, b_k)$.

26. Seconde forme de l'inégalité de Cauchy Supposons encore $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$. De l'inégalité (13) on tire immédiatement

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\,. \tag{14}$$

(Si $\mathrm{B} \geqslant 0$, l'inégalité $\mathrm{A}^2 \leqslant \mathrm{B}^2$ équivaut à $-\mathrm{B} \leqslant \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$.) On n'a égalité dans (14) que si on a égalité dans (13) et $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geqslant 0$. La première condition équivaut au fait qu'il existe un réel α tel que $(a_1, \dots, a_k) = \alpha(b_1, \dots, b_k)$. La quantité $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ s'écrit alors

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \alpha(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

La seconde condition devient alors $\alpha \geqslant 0$. (On rappelle qu'on a $b_1^2 + \cdots + b_n^2 \geqslant 0$ et qu'on n'a $b_1^2 + \cdots + b_n^2 = 0$ que si $b_1, \dots, b_n$ sont tous nuls.)

Finalement, on n'a égalité dans (14) (seconde forme de l'inégalité de Cauchy) que s'il existe un réel α *positif* tel que $(a_1, \dots, a_k) = \alpha(b_1, \dots, b_k)$ ou si $(b_1, \dots, b_k) = (0, \dots, 0)$.

---

1. Précisons la notation employée. On désigne par $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une suite finie de n réels, on dit aussi un *n-uplet*. Pour $n = 2$, il s'agit d'un couple, pour $n = 3$ d'un triplet. On écrit $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ pour indiquer que les suites sont identiques, autrement dit que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. La relation $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (b_1, b_2, \dots, b_n)$ signifie que les suites sont différentes. Il faut et il suffit pour cela qu'elles soient différentes pour un de leurs termes, autrement dit qu'il existe un i tel que $a_i \neq b_i$. On définit l'addition des n-uplets et le produit par un *scalaire* (c'est-à-dire un nombre) :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n).$$

27. Inégalité triangulaire. L'inégalité triangulaire est l'inégalité

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}. \tag{15}$$

Si on choisit dans le plan un repère orthonormé et si P, Q, R sont trois points du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ aient pour coordonnées dans ce repère (a_1, b_1) et (a_2, b_2) respectivement, alors l'inégalité (15) s'écrit

$$PR \leqslant PQ + QR.$$

Autrement dit, elle exprime le fait que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure à la somme des deux autres. D'où le nom d'*inégalité triangulaire.*

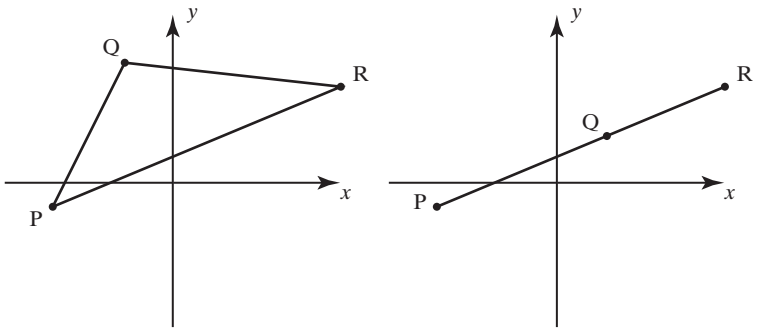

Fig. 2. Inégalité triangulaire : cas général, cas d'égalité

Pour prouver l'inégalité triangulaire, on élève au carré. (On rappelle que *lorsque* A *et* B *sont positifs,* les inégalités $A \leqslant B$ et $A^2 \leqslant B^2$ sont équivalentes.) Après simplification on obtient l'inégalité équivalente

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

dans laquelle on reconnaît l'inégalité de Cauchy. L'inégalité triangulaire est donc toujours vérifiée, et on a égalité lorsque les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont colinéaires et de même sens, et seulement dans ce cas.

Exercices

Exercice 1. Montrer que

$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

Exercice 2. *Les tables de quarts de carrés.* L'identité de l'exercice précédent était la base d'une méthode de multiplication rapide employée au Moyen Âge. On publiait à cet époque des tables de *quarts de carrés.*

Pour calculer 29×13, on additionne : $29 + 13 = 42$. On cherche dans la table le quart du carré de 42 : 441. On soustrait $29 - 13 = 16$. Pour le quart du carré de 16, la table donne 64. Donc $29 \times 13 = 441 - 64 = 377$. Pour calculer 29×14, la même méthode donnerait : Somme : $29 + 14 = 43$. Quart du carré : 462,25. Différence : $29 - 14 = 15$. Quart du carré : 56,25. Résultat : $29 \times 14 = 462{,}25 - 56{,}25 = 406$.

On demande de montrer qu'en fait *on obtient le même résultat* pour xy, quels que soient les entiers x et y, *si on utilise la division entière* $49 \operatorname{div} 4 = 12$ *au lieu de la division avec virgule* $49/4 = 12{,}25$.

Exercice 3. Calculer $(a + b + c + d)^4$.

Exercice 4. Dans le développement de $(a + b - c)^6$, combien y a-t-il de termes précédés d'un signe plus et de termes précédés d'un signe moins ? (Un terme du genre $2abc^4$ compte pour deux.)

Exercice 5. Soit $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. On suppose $a_n \neq 0$, le polynôme $\mathrm{P}(x)$ est donc de degré n. Soit a un réel. Montrer qu'on a

$$\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(a) = (x - a)\mathrm{Q}(x)$$

où $\mathrm{Q}(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$. En déduire que si a est racine de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, on peut mettre en facteur $x - a$ dans $\mathrm{P}(x)$.

Exercice 6. Vérifier l'identité

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Exercice 7. Montrer que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Donner une interprétation de cette identité en termes de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Exercice 8. Montrer que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

En déduire que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$$

Donner une interprétation de cette identité en termes de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Exercice 9. Le prix d'un produit X a augmenté de 20 % la première année et de 30 % la seconde année (pour fixer les idées, il a augmenté de 20 % entre le 1er janvier 2007 et le 1er janvier 2008, de 30 % entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2009).

L'augmentation totale sur deux ans est-elle égale, supérieure ou inférieure à 50 % ? L'augmentation moyenne par an est-elle égale, supérieure ou inférieure à 25 % ? *Répondre sans calculer,* puis vérifier.

Exercice 10. Un cycliste fait l'ascension d'un col, d'une longueur de 20 km, à la vitesse u. Il fait la descente (de l'autre côté), de 20 km également, à la vitesse v. Quelle est sa vitesse moyenne sur le parcours total de 40 km ?

Comparer cette vitesse à $a = \frac{1}{2}(u + v)$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui conserve la moyenne arithmétique, c'est-à-dire telle que

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

On suppose f dérivable. Montrer que f est une fonction affine.

(Le même résultat est encore vrai si on suppose seulement que f est continue, mais il devient bien plus difficile à démontrer.)

Exercice 12. Donner des exemples de fonctions telles que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

quels que soient les réels $x > 0$ et $y > 0$. Donner aussi des exemples de fonctions telles que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

quels que soient les réels $x > 0$ et $y > 0$. Donner des exemples de fonctions ne possédant aucune des deux propriétés.

Exercice 13. On part de deux nombres a et b strictement positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par les relations

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

avec les valeurs initiales $a_0 = a, b_0 = b$. Expérimenter avec quelques valeurs de a et b, et tirer de là une stratégie pour montrer que a_n et b_n convergent vers une même limite.

Cette limité est notée $\mathrm{M}(a,b)$ et on dit que c'est la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

Exercice 14. Démontrer les inégalités ci-dessous :

$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad (x > 0)$
$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (x, y \text{ réels})$
$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2) \quad (a, b \text{ réels})$
$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2} \quad (a, b \geqslant 0)$
$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc \quad (a, b, c \geqslant 0)$
$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca \quad (a, b, c \text{ réels})$
$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+d)(b+c)} \quad (a, b, c, d \geqslant 0)$
$abc(a+b+c) \leqslant a^3b + b^3c + c^3a \quad (a, b, c \geqslant 0)$
$\frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (a, b, c \geqslant 0)$

N.B. Certaines de ces inégalités sont très faciles à démontrer, d'autres sont assez difficiles.

Exercice 15. Démontrer les inégalités ci-dessous :

$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$
$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a.$
$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$
$(a+b)^2 \leqslant \frac{5}{4}(a+2b)^2.$
$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+b)(c+d)} \quad (a, b, c, d > 0).$
$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2}.$

Exercice 16. Montrer que si a et b sont > 0 on a

$$\frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} \geqslant \frac{3}{2^{2/3}}.$$

Exercice 17. Trouver deux réels α et β tels que

$$\alpha(x^2 + y^2) \leqslant x^2 + 3xy + 2y^2 \leqslant \beta(x^2 + y^2)$$

pour tous réels x et y.

Exercice 18. Montrer que si ab et $a + b$ ont même signe, alors

$$(a+b)(a^4 + b^4) \geqslant (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Exercice 19. Montrer que si $a + b > 0$, on a

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Exercice 20. Montrer que si $a > b > 0$, on a

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Exercice 21. Soient a, b, c les côtés d'un triangle rectangle (c est l'hypoténuse). Démontrer que pour n entier > 2 on a $c^n > a^n + b^n$.

Exercice 22. Soient a, b, c les côtés d'un « vrai » triangle. Démontrer qu'on a

$$\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$$

(*Indication.* Faire intervenir le demi-périmètre $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ et observer que $a < p < b + c$, etc.)

Exercice 23. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$(a+b)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big) \geqslant 4, \qquad (a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \geqslant 9$$

(utiliser l'inégalité $x + 1/x \geqslant 2$ $(x > 0)$). Généraliser.

Exercice 24. Montrer que pour $x > -1$ on a

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

a) en étudiant les variations d'une fonction ;
b) sans utiliser d'analyse.

Exercice 25. Exprimer le nombre rationnel $x = 2{,}754545454...$ sous forme d'une fraction.

Exercice 26. Vérifier que le développement décimal de $1/7$ est périodique. Retrouver la valeur $1/7$ en partant du développement décimal. Observer d'autres propriétés de ce développement décimal.

Exercice 27. Calculer $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots$, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots$

Exercice 28.** On cherche à attribuer une valeur à $\mathrm{S} = 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots$. On observe que

$$\mathrm{S} = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots) = 1 - \mathrm{S},$$

donc $\mathrm{S} = 1/2$.

Autre méthode. On observe que $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ est d'une certaine manière la limite de $\mathrm{S}_q = \sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n$ quand q tend vers 1. Or $\mathrm{S}_q = \frac{1}{1+q}$ tend vers $1/2$ quand q tend vers 1. Raison de plus pour poser $\mathrm{S} = 1/2$.

Malheureusement, on peut aussi écrire

$$\mathrm{S} = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0,$$

ainsi que

$$\mathrm{S} = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - 0 - \cdots = 1.$$

Que faut-il penser de tout ça ?

Exercice 29.** *Multiplicateur keynésien et série géométrique.* Selon Keynes, dans une économie où *il n'y a pas plein emploi* des ressources (en hommes et en équipement) une variation *exogène* de la demande, c'est-à-dire dont la cause n'est pas l'accroissement de revenu lié à l'accroissement de la

production, peut provoquer une variation plus importante du revenu national. C'est le rapport entre les deux variations qui est appelé *multiplicateur keynésien.*

Voici un modèle rudimentaire permettant de comprendre cette notion.

On peut considérer que les dépenses de consommation courante des ménages (dans leur ensemble) sont fonction de leur revenu : $\mathrm{C} = f(\mathrm{Y})$, où Y désigne le revenu national et C le total des dépenses de consommation. On ne pourrait pas faire une telle hypothèse pour les dépenses d'investissement des entreprises, qui sont gouvernées par des prévisions sur la demande future, et qui sont pour cela soumises à des fluctuations.

Le modèle s'écrit donc

$$\mathrm{C} = f(\mathrm{Y})$$
$$\mathrm{Y} = \mathrm{C} + \mathrm{A}$$

On désigne par A l'ensemble des autres dépenses, dépenses d'investissement des entreprises et dépenses de l'État. On considère que A est dans une large mesure indépendant de Y et de C, et A est appelé pour cette raison *dépense autonome.*

Dans ces conditions, Y et C s'obtiennent en résolvant un système de deux équations à deux inconnues. On peut ramener ce système à une seule équation en reportant la première équation dans la seconde :

$$\mathrm{Y} - f(\mathrm{Y}) = \mathrm{A}.$$

Si A subit une petite variation $\Delta\mathrm{A}$, le revenu national Y subira une petite variation $\Delta\mathrm{Y}$, et $f(\mathrm{Y})$ subira une petite variation (approximativement) égale à $f'(\mathrm{Y})\Delta\mathrm{Y}$. On doit donc avoir

$$\Delta\mathrm{Y} - f'(\mathrm{Y})\Delta\mathrm{Y} = \Delta\mathrm{A}$$

soit

$$\Delta\mathrm{Y} = \left(\frac{1}{1 - f'(\mathrm{Y})}\right)\Delta\mathrm{A}$$

Le multiplicateur keynésien est le nombre $k = \dfrac{1}{1 - f'(\mathrm{Y})}$.

Il est raisonnable de supposer $0 < f'(\mathrm{Y}) < 1$. On a donc $k > 1$. De plus k est d'autant plus grand que $f'(\mathrm{Y})$ est proche de 1.

C'est toujours aussi surprenant pour le mathématicien pur de voir les conclusions d'un raisonnement théorique appliquées dans la pratique, mais les parlementaires considèrent que « le multiplicateur keynésien mesure l'efficacité d'une politique de relance : s'il est de 1,5, cela signifie qu'une augmentation du déficit d'1 euro ($\Delta\mathrm{A} = 1$) augmente le PIB de 1,5 euro ($\Delta\mathrm{Y} = 1,5$) ». Voir par exemple `http://www.senat.fr/rap/l08-135-11/l08-135-1111.html`

On peut maintenant poser quelques questions, portant aussi bien sur l'interprétation du modèle que sur sa validité mathématique.

a) Quelle est la signification des hypothèses $f' > 0$, $f' < 1$, f' proche de 1 ?

b) L'hypothèse $0 < f' < 1$ assure-t-elle que l'équation $\mathrm{Y} - f(\mathrm{Y}) = \mathrm{A}$ a une solution et une seule quelle que soit la valeur de A ? Assure-t-elle que cette solution est une fonction dérivable de A ?

Dans le raisonnement précédent, le multiplicateur keynésien est déduit du maintien d'un équilibre. Il relève de la *statique* (le terme est utilisé en économie de la même façon qu'en physique).

On peut aussi lui donner une interprétation *dynamique.* On le verra plus facilement en supposant que f est une fonction affine, de la forme $f(\mathrm{Y}) = a\mathrm{Y} + b$. On a donc $f'(\mathrm{Y}) = a$. L'idée est que quand l'ensemble des agents reçoit $\Delta\mathrm{A}$ (Y est augmenté de $\Delta\mathrm{A}$), la quantité $a\Delta\mathrm{A}$ est consommée, sous forme d'achats de produits. Le reste, soit $(1-a)\Delta\mathrm{A}$ est épargné. Les producteurs et les vendeurs de ces produits reçoivent donc un revenu supplémentaire de $a\Delta\mathrm{A}$ (laquelle s'ajoute donc au revenu national Y). Sur ce revenu, une part correspondant à $a^2\Delta\mathrm{A}$ est consommée à son tour, et la somme correspondante vient s'ajouter au revenu Y, etc. On comprend à la lumière de cette interprétation qu'il faut un certain temps pour parvenir à l'équilibre.

À la variation $\Delta\mathrm{A}$ de la dépense autonome correspond donc la variation

$$\Delta\mathrm{Y} = \Delta\mathrm{A} + a\Delta\mathrm{A} + a^2\Delta\mathrm{A} + \ldots = (1 + a + a^2 + \ldots)\Delta\mathrm{A} = \left(\frac{1}{1-a}\right)\Delta\mathrm{A}$$

du revenu national.

Pour des commentaires sur les limites de ce modèle (notamment le fait que Keynes se gardait bien de donner des valeurs précises à k) on pourra consulter le *Dictionnaire d'analyse économique* de Bernard Guerrien, dont ce qui précède est tiré, ou n'importe quel manuel de macroéconomie.

Exercice 30.** *Division informatique et série géométrique.* Sur certains des premiers ordinateurs dans les années 1950, la division n'était pas implantée dans les circuits de la machine. Les programmeurs devaient donc programmer eux-mêmes la division à partir des autres opérations : addition, soustraction, multiplication. Une méthode consistait à remplacer certains inverses par une série géométrique en utilisant la relation

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \quad (|q| < 1).$$

a) Essayer d'imaginer une méthode détaillée. Ne pas oublier que les nombres sont stockés en machine sous forme de développement en base 2 : $x = 2^p \times 0.x_1 x_2 \ldots x_q$ ($x_1 \neq 0$, donc $x_1 = 1$). L'entier q dépend de la machine utilisée, on peut prendre $q = 32$.

b) On veut calculer $53/109$ avec huit chiffres significatifs exacts avec la méthode proposée en réponse à la question *a*). Combien de multiplications doit effectuer la machine ? (Si vous ne pouvez pas le déterminer, c'est que la description de votre méthode n'est pas assez précise.)

Chapitre 2
L'espace

Introduction

1. On va dans les pages qui suivent « reconstruire » les bases de la géométrie. Bien entendu, chacun connaît les points, les droites, les plans, les vecteurs, les cercles, les repères, les coordonnées, etc., tout ce qu'on appelle les objets de la géométrie, et beaucoup de propriétés de ces objets.

Il ne s'agit pas d'oublier tout ce qu'on sait, il s'agit seulement d'énoncer de façon précise certaines propriétés de ces objets ; on verra ensuite que toutes les autres propriétés déjà connues découlent logiquement des propriétés mises au départ de l'exposé, qu'on appelle *axiomes*. Au départ, on n'aura que deux notions de base, les points et les vecteurs. Les droites, les plans, le parallélisme, les angles et le reste seront redéfinis à partir de là, ce qui vaut sans doute mieux si on pense que les définitions remontent au collège, autant dire se perdent dans la nuit des temps, ou qu'elles n'ont jamais été données : les notions sont suggérées sans être vraiment définies, ce qui est une excellent façon de faire à ce niveau.

Il y a plusieurs raisons pour utiliser maintenant la méthode axiomatique. Outre le fait qu'on donne ainsi à l'enseignement de la géométrie des bases solides (sans définitions précises, pas de démonstrations possibles), la principale est qu'on fait ainsi le lien entre la géométrie de l'enseignement secondaire et l'algèbre linéaire, une théorie qui joue un rôle essentiel dans toutes les mathématiques. Car c'est par l'algèbre linéaire que les idées de la géométrie pénètrent le reste des mathématiques (algèbre, analyse, théorie des nombres, probabilités, statistiques). On n'en donne qu'une très faible idée en indiquant que

- l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires a des propriétés qui généralisent celles des droites et des plans ;
- dans un système d'équations linéaires, on combine les équations de la même façon qu'on combine ailleurs les vecteurs ;
- l'addition des fonctions ressemble à celle des vecteurs ; d'ailleurs pour beaucoup de physiciens une fonction est un vecteur à une infinité de coordonnées ;
- de nombreuses transformations en analyse, comme la dérivation, ont un comportement formel (dérivée d'une somme, etc.) semblable à celui des rotations ou des projections ;
- les codes correcteurs utilisés dans la transmission des données s'inspirent de la projection orthogonale, tandis que les méthodes d'analyse des données

en statistique utilisent, elles, directement la projection orthogonale ;
– la corrélation entre deux séries statistiques a toutes les propriétés du cosinus d'un angle, etc.

Sur ces sujets, et sur d'autres, aussi loin qu'on aille en mathématiques, on retrouve toujours en filigrane l'intuition de l'espace physique, inscrite dans notre cerveau par l'évolution, et renforcée par l'étude de la géométrie dans l'enseignement primaire et secondaire.

§ 1. Points et vecteurs

2. Voici les *axiomes de la géométrie.*

I. *On dispose de deux ensembles :*
E, *appelé l'espace, et donts les éléments sont appelés points ;*
$\overrightarrow{\mathrm{E}}$ *(qui n'a pas de nom), dont les éléments sont appelés vecteurs ;*
ainsi que d'une application notée $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *qui a un couple de points de* E *associe un élément de* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

II. *Pour* A *fixé, l'application* $\mathrm{B} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *est une bijection de* E *sur* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. (Ce qui signifie que A étant donné, pour tout $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$, il existe un point B de E et un seul tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$.) *On dit que* B *est le translaté de* A *par le vecteur* $\vec{v}$ *et on pose* $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \vec{v}$.

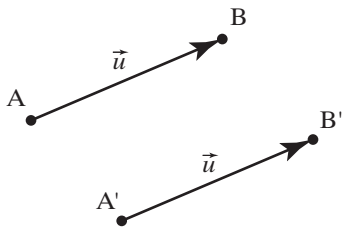

Fig. 1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \vec{u}$; $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \vec{u}$, $\mathrm{B'} = \mathrm{A'} + \vec{u}$.

III. *Les vecteurs peuvent être additionnés, et ils peuvent être multipliés par les nombres réels. Dans ce contexte, les nombres réels sont souvent appelés scalaires. Les règles de calcul habituelles s'appliquent : on a par exemple* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *; et il y a dans* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ *un vecteur noté* $\vec{0}$ *tel que*

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \quad 0\vec{v} = \vec{0}.$$

et pour chaque vecteur $\vec{v}$*, il y a un vecteur noté* $-\vec{v}$ *tel que*

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}, \quad (-1)\vec{v} = -\vec{v}.$$

On écrit toujours 0 au lieu de $\vec{0}$, car on ne risque pas de confondre le vecteur zéro et le zéro scalaire : on sait toujours si une expression représente un vecteur ou un scalaire.

IV. (Relation de Chasles.) *On a toujours* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

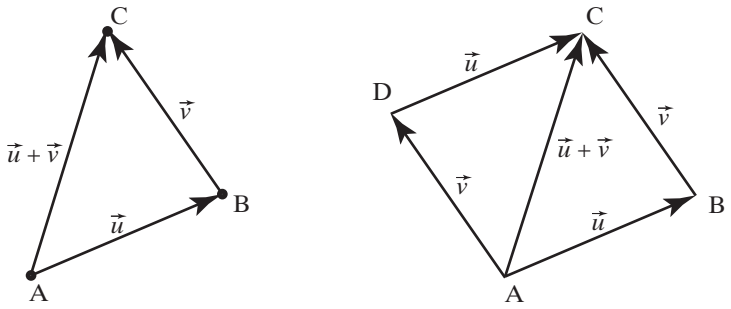

Fig. 2. À gauche, relation de Chasles. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$. À droite, parallélogramme. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $(A + \vec{v}) + \vec{u} = (A + \vec{u}) + \vec{v}$.

De la relation de Chasles et de ce qui précède, on déduit que (i) $\overrightarrow{AA} = 0$, et que plus généralement (ii) $\overrightarrow{AB} = 0$ *si et seulement si* $A = B$. On a toujours (iii) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. On a aussi (iv) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ *si et seulement si* $B = C$, et plus généralement (v) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Exercice. Démontrer toutes les assertions qui suivent l'énoncé de la relation de Chasles.

Exercice. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Si ces relations sont satisfaites, on dit que ABDC est un parallélogramme (voir figure 2).

3. *Remarque.* Dans l'enseignement secondaire, les propriétés des vecteurs se démontrent à partir de la figure du parallélogramme. Ici on procède en sens inverse. On part de l'addition des vecteurs, on (re-)définira plus tard les droites, le parallélisme, le parallélogramme à partir de l'addition des vecteurs. L'essentiel est qu'à la fin les propriétés démontrées soient les mêmes et coïncident avec les propriétés des droites parallèles utilisées dans le monde réel, par exemple dans les figures de géométrie, la construction de machines ou les plans d'architecte.

Cependant, pour tracer les figures, on se sert de tout ce qui est connu, y compris de la notion de parallélogramme. L'alternative serait de ne dessiner aucune figure avant la fin du chapitre 4.

La relation de Chasles équivaut à la relation

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}).$$

On appelle *translation de vecteur* $\vec{u}$ le transformation de E (une transformation de E est par définition une application de E dans lui-même) qui à M associe le point $M' = M + \vec{u}$. La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée $t_{\vec{u}}$. On a donc

$$t_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}.$$

La relation ci-dessus entraîne donc

$$t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{0}} = \mathrm{Id}$$

où Id désigne la *transformation identité* de E, celle qui au point M fait correspondre le point M, autrement dit la transformation qui laisse tout en place.

On déduit de là que les translations sont des bijections de E sur E : la bijection réciproque de la translation $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} + \vec{u}$ est la translation $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} - \vec{u}$.

V. (Bases et dimension.) *Il existe trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ tels que tout $v \in \mathrm{E}$ s'écrive*[1]

$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$

avec $x, y, z \in \mathbb{R}$, et ce d'une façon et d'une seule.

On dit qu'une famille de trois vecteurs possédant cette propriété est une *base* de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. On verra qu'il n'existe pas qu'une seule base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, il y en a énormément. Mais l'axiome, c'est qu'il en existe au moins une.

Une expression de la forme $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n$ est appelée *combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$*. Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont les *coefficients* de la combinaison linéaire. On peut reformuler la définition des bases en disant que trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ si tout élément de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, et ce, d'une seule façon.

Si on a en vue la géométrie plane, on suppose qu'il existe deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ tels que tout vecteur $\vec{v}$ s'écrive

$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath},$$

avec $x, y \in \mathbb{R}$. Dans ce cas E *s'appelle* le plan. *On peut employer les notations* P *et* $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ *à la place de* E *et* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

VI. Produit scalaire. *On dispose d'une application notée $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}.\vec{v}$, qui à un couple de vecteurs associe un nombre réel (un scalaire), et qui est appelée* produit scalaire. *Cette application a les propriétés suivantes (α désigne un réel quelconque) :*

(i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;

(ii) $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{v}.\vec{u})$;

(iii) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}'$;

(iv) $\vec{u}.\vec{u} > 0$ *si* $\vec{u} \neq \vec{0}$.

(On a aussi $\vec{u}.\vec{u} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$, cela se voit facilement à partir de (ii) *ou de* (iii).*)*

1. À propos de *s'écrire*. Quand on dit par exemple « Le réel a est $\geqslant 0$, il s'écrit donc $a = b^2$, » on pourrait dire de façon plus détaillée : « Le réel a est $\geqslant 0$, il existe donc au moins un réel x (en général deux) tel que $a = x^2$, choisissons-en un, et appelons-le b. » On dit de la même façon « Le réel a est $\geqslant 0$, il s'écrit donc $a = b^2$ avec $b \geqslant 0$, et ce d'une façon d'une seule. »

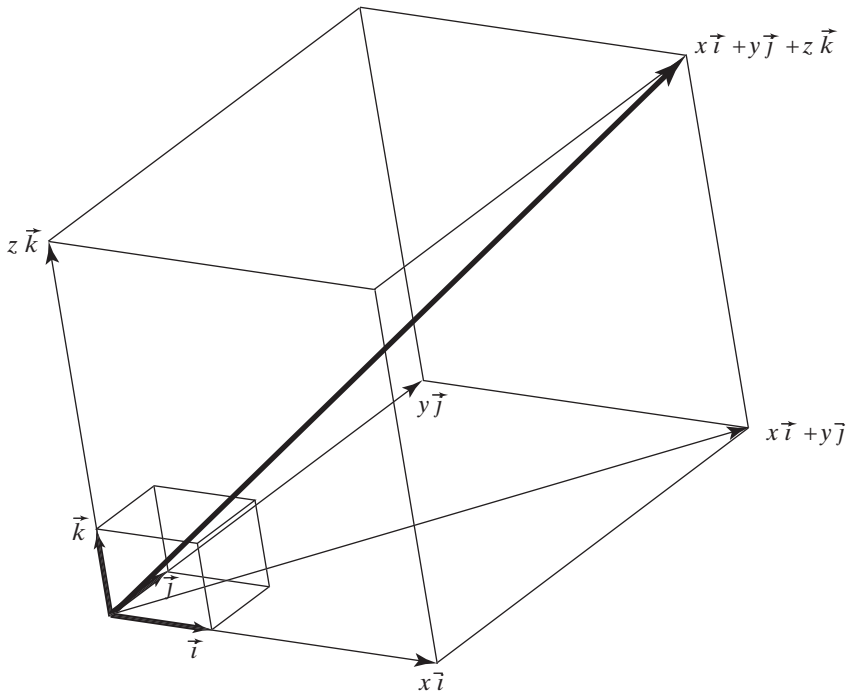

Fig. 3. Décomposition d'un vecteur sur une base

Ceux qui ont déjà étudié le produit scalaire savent qu'on peut le définir par la formule $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$, où $\|\vec{u}\|$ désigne la norme (ou longueur) du vecteur $\vec{u}$, et θ est l'angle entre les deux vecteurs. On peut aussi le définir pour les vecteurs du plan en utilisant les coordonnées dans un repère orthonormé, par la formule $\vec{u}.\vec{v} = uv + u'v'$. Dans l'espace, il y a une troisième coordonnée, et $\vec{u}.\vec{v} = uv + u'v' + u''v''$. Ici, comme nous l'avons déjà dit, nous allons en sens contraire, et les notions de longueur, d'angle, de repère orthonormé seront définies dans les pages qui suivent, à partir du produit scalaire.

4. Norme d'un vecteur. Distance de deux points. Par définition, la *norme* du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = (\vec{u}.\vec{u})^{1/2}$. Comme on désigne le *carré scalaire* $\vec{u}.\vec{u}$ par la notation $\vec{u}^2$, on a $\|u\|^2 = (\vec{u}^2)$: dans cette relation, le premier membre est le carré d'un nombre réel, le second le carré scalaire d'un vecteur.

Observons que

$$\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|.$$

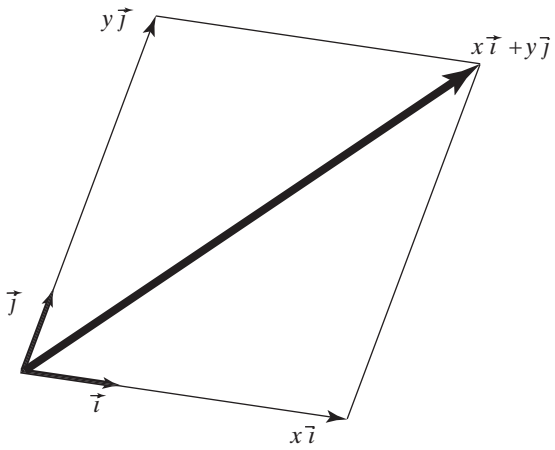

Fig. 4. Décomposition d'un vecteur sur une base en dimension 2

Cela résulte immédiatement de la linéarité du produit scalaire à droite et à gauche : $(\alpha\vec{v}).(\alpha\vec{v}) = \alpha^2\vec{v}.\vec{v}$. On a notamment $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

La *distance* de deux points A et B, notée $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$, est par définition la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$:

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|.$$

La distance des points A et B (on ne précise pas d'ordre entre A et B puisque $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \|-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\| = d(\mathrm{B},\mathrm{A})$) est traditionnellement notés AB. On a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = \mathrm{AB}^2.$$

5. Vecteurs colinéaires. On dit que *le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$,* ou *multiple scalaire* de $\vec{v}$, si on a $\vec{u} = k\vec{v}$ pour un certain scalaire k. Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à n'importe quel vecteur : $\vec{0} = 0.\vec{v}$, mais aucun vecteur $\neq 0$ n'est colinéaire à $\vec{0}$.

On dit que *deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires* si l'un des deux est colinéaire à l'autre. Cette définition recouvre deux situations : ou bien les deux vecteurs sont non nuls, et dans ce cas chacun est colinéaire à l'autre puisque par exemple des relations $\vec{u} = k\vec{v}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, on déduit que $k \neq 0$, et en multipliant par k^{-1} que $\vec{v} = k^{-1}\vec{u}$; ou bien l'un des deux vecteurs est égal à zéro (ou les deux).

6. Vecteurs orthogonaux. On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* (notation $\vec{u} \perp \vec{v}$) si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0.$$

Exercice. On considère trois points A, B, C tels que $AB = BC = CA = a$. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

a) en utilisant vos connaissances sur les triangles équilatéraux, les angles, etc.

b) en n'utilisant que les notions et les propriétés introduites ci-dessus. (*Indication.* Écrire $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ et développer.)

§ 2. Bases et repères. Coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'un point

7. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, et si $\vec{u} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$, on dit que u, v, w sont les *coordonnées du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Rappelons que, par définition des bases, tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{E}$ peut s'écrire $\vec{u} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$ (c'est une façon abrégée de dire : pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un réel u, un réel v et un réel w tels que l'on ait $\vec{u} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$), et qu'il ne peut s'écrire ainsi que d'une seule façon. En associant à un vecteur $\vec{u}$ le triplet de réels (u, v, w) formé par ses coordonnées, on obtient une correspondance bijective entre $\overrightarrow{E}$ et $\mathbb{R}^3$.

On exprime l'égalité de deux vecteurs en écrivant qu'ils ont mêmes coordonnées : si

$$u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k} = u'\vec{\imath} + v'\vec{\jmath} + w'\vec{k}$$

alors

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w'.$$

Cela s'appelle « identifier » les deux membres de l'égalité. Bien noter que pour identifier, on a utilisé le fait que les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ forment une base.

8. Matrices-colonnes. On représente les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ soit par l'élément (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$, soit par un tableau à une colonne, comme

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

appelé *matrice-colonne* ou *colonne*. Les opérations sur les vecteurs se traduisent immédiatement en opérations sur les colonnes : si $\vec{u}$ est représenté par la colonne U et $\vec{u}'$ par la colonne $U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$, alors le vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ est représenté par la colonne

$$U + V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + u' \\ v + v' \\ w + w' \end{pmatrix}$$

En effet, dire que $\vec{u}$ est représenté par la colonne U, c'est dire que $\vec{u} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$. De même $\vec{u}' = u'\vec{\imath} + v'\vec{\jmath} + w'\vec{k}$; d'où on tire $\vec{u} + \vec{u}' = (u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}) + (u'\vec{\imath} + v'\vec{\jmath} + w'\vec{k}) = (u + u')\vec{\imath} + (v + v')\vec{\jmath} + (w + w')\vec{k}$.

On dit que, dans une base donnée, l'addition des vecteurs se fait coordonnée par coordonnée. Les éléments d'une colonne sont appelées coefficients, ou composantes, et l'addition des colonnes se fait coefficient par coefficient.

De la même façon, le produit d'un vecteur par un scalaire s'effectue coordonnée par coordonnée : $\alpha\vec{u} = (\alpha u)\vec{\imath} + (\alpha v)\vec{\jmath} + (\alpha w)\vec{k}$ et le produit correspondant de la colonne U par le scalaire α se fait coefficient par coefficient :

$$\alpha \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \alpha u \\ \alpha v \\ \alpha w \end{pmatrix}.$$

9. Coordonnées d'un point dans un repère. Un repère $\mathcal{R}$ de E consiste en la donnée, en plus d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, d'un point O de E, appelé *origine* et d'une base. On écrit $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (ou, ce qui revient au même, si $\mathrm{M} = \mathrm{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$), on dit que x, y, z sont les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

Le choix d'une origine permet de ramener les opérations sur des points à des opérations sur les vecteurs :

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \vec{u}$$

ou

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Si un repère est choisi, on peut représenter le point de coordonnées x, y, z (dans ce repère) par l'élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ ou par la matrice-colonne

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

10. Calculs en coordonnées. Les premiers calculs sont très simples. On se place dans un repère $\mathcal{R}$ fixé.

Si les points A et B sont représentés par la colonnes $\mathrm{X_A} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X_B} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{B} \\ y_\mathrm{B} \\ z_\mathrm{B} \end{pmatrix}$, alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est représenté par la colonne

$$\mathrm{X_B} - \mathrm{X_A} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} \end{pmatrix}.$$

En effet, on a par hypothèse $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_\mathrm{A}\vec{\imath} + y_\mathrm{A}\vec{\jmath} + z_\mathrm{A}\vec{k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x_\mathrm{B}\vec{\imath} + y_\mathrm{B}\vec{\jmath} + z_\mathrm{B}\vec{k}$. il en résulte que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_\mathrm{B}\vec{\imath} + y_\mathrm{B}\vec{\jmath} + z_\mathrm{B}\vec{k} - x_\mathrm{A}\vec{\imath} + y_\mathrm{A}\vec{\jmath} + z_\mathrm{A}\vec{k} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})\vec{\imath} + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})\vec{\jmath} + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})\vec{k}$.

Si le vecteur $\vec{u}$ est représenté par la colonne $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, alors le point $\mathrm{A} + \vec{u}$ est représenté par la colonne

$$\mathrm{X_A} + \mathrm{U} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{A} + u \\ y_\mathrm{A} + v \\ z_\mathrm{A} + w \end{pmatrix}.$$

En effet, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \vec{u} = x_\mathrm{A}\vec{\imath} + y_\mathrm{A}\vec{\jmath} + z_\mathrm{A}\vec{k} + u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k} = (x_\mathrm{A} + u)\vec{\imath} + (y_\mathrm{A} + v)\vec{\jmath} + (z_\mathrm{A} + wx)\vec{k}$.

La *translation de vecteur* $\vec{u}$ est donc l'application de E dans E définie par

$$\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} + \vec{u}, \quad \text{ou, en coordonnées :} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ z + w \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire que la translation de vecteur $\vec{u}$ est définie en coordonnées par les relations

$$\begin{aligned} x' &= x + u \\ y' &= y + v \\ z' &= z + w \end{aligned}$$

où il est sous-entendu que x, y, z sont les coordonnées d'un point et x', y', z' sont celles de son image par la translation.

§ 3. E, $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\mathbb{R}^3$

11. À force de désigner un point ou un vecteur par ses coordonnées, on prend l'habitude de confondre E et $\mathbb{R}^3$, ou $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\mathbb{R}^3$, et même de les identifier en écrivant $\mathrm{M} = (x, y, z)$ ou $\vec{u} = (u, v, w)$. Ce n'est pas une mauvaise habitude, à condition de l'abandonner dès que le problème étudié met en jeu des changements de base ou d'origine.

Cette pratique est d'ailleurs justifiée par les définitions. Les axiomes de base ont été choisis de manière à décrire l'espace usuel E, qu'on appelle aussi l'espace physique. Mais ils sont encore valables si on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathbb{R}^3$, à

condition de convenir que $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ et que le produit scalaire est donné par la formule $(u, v, w) \,.\, (u', v', w') = uu' + vv' + ww'$.

Il y a toutefois une différence entre $\mathbb{R}^3$ et l'espace usuel E. Il y a un repère privilégié dans $\mathbb{R}^3$, qu'on appelle le repère canonique : l'origine est $0 = (0, 0, 0)$, les vecteurs de base sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$: le vecteur (u, v, w) s'écrit

$$(u, v, w) = u(1, 0, 0) + v(0, 1, 0) + w(0, 0, 1)$$

et le point (x, y, z) s'écrit

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Par contre, il n'y a aucun repère privilégié dans E. On doit en choisir un : en astronomie par exemple, on prendra par exemple pour O le centre du Soleil et les vecteurs de base dirigés vers trois étoiles fixes. Une fois ce choix fait, l'identification d'un point ou d'un vecteur avec le triplet de ses coordonnées fera justement correspondre le repère choisi au repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

§ 4. Le problème du changement de repère en dimension 2

12. C'est par définition (voir axiome V) que le plan des vecteurs de la géométrie plane, le plan $\overrightarrow{P}$ possède une base et que le plan P possède un repère. On ne va pas exposer ici toutes les raisons qu'il y a de changer de repère pour résoudre un problème, théorique ou pratique... Le changement d'origine ne posant aucune difficulté, concentrons-nous sur le changement de base.

Exercice. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\overrightarrow{P}$.

a) Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ forment aussi une base de $\overrightarrow{P}$. Si un vecteur $\vec{x}$ a pour coordonnées x et y dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, quelles sont ses coordonnées, notées X et Y, dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

b) Mêmes questions en prenant successivement $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\jmath}, \vec{\imath})$, $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\imath}, \vec{\jmath} + \alpha\vec{\imath})$ (α réel donné).

La première question à se poser est : à quelle condition (nécessaire et suffisante) deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment-ils une base ?

13. Vecteurs indépendants. On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *indépendants* s'ils ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si $\vec{u}$ n'est pas multiple de $\vec{v}$ et $\vec{v}$ n'est pas multiple de $\vec{u}$.

Ainsi formulée, la définition des vecteurs indépendants est parfois malaisée à employer. Voici une propriété équivalente.

Pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient indépendants, il faut et il suffit que la relation $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$ entraîne $\alpha = \beta = 0$.

Prouvons la contraposée[2] :

2. La contraposée de P $\Leftrightarrow$ Q est (non P) $\Leftrightarrow$ (non Q). Il revient exactement au même de démontrer que P $\Leftrightarrow$ Q ou que (non P) $\Leftrightarrow$ (non Q).

Pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des scalaires α et β non tous les deux nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$.

Dans un sens : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a $\vec{u} = k\vec{v}$, auquel cas $1.\vec{u} - k\vec{v} = 0$, ou $\vec{v} = l\vec{u}$, auquel cas $l\vec{u} - 1.\vec{v} = 0$. Dans l'autre : supposons qu'on ait $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$ avec α ou $\beta \neq 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $\vec{u} = -(\beta/\alpha)\vec{v}$, si $\beta \neq 0$, alors $\vec{v} = -(\alpha/\beta)\vec{u}$.

14. Un exercice de traduction. Dire que $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est dire qu'il existe des réels X et Y tels que $X\vec{u} + Y\vec{v} = \vec{x}$. En remplaçant les vecteurs par leur matrices-colonnes dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, cette relation devient

$$\text{(R)} \qquad X\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} uX + vY = x \\ u'X + v'Y = y \end{cases},$$

Le vecteur $\vec{x}$ est donc combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si le système d'équation linéaire ci-dessus possède une solution (X, Y).

Le principales propriétés d'un couple de deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ se traduisent ainsi en propriétés du système d'équations linéaires (S).

(i) *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base $\Leftrightarrow$ le système* (S) *a une solution unique quels que soient les seconds membres x et y.*

(ii) *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants $\Leftrightarrow$ le système* (S_0) *n'a que la solution nulle* $X = Y = 0$.

(iii) *Tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ le système* (S) *a une solution quels que soient les seconds membres x et y.*

15. Théorème. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le système d'équations linéaires*

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} uX + vY = x \\ u'X + v'Y = y \end{cases}$$

possède une solution unique quelles que soient les valeurs des seconds membres x et y ;

(ii) *Le système d'équations linéaires*

$$(\mathrm{S}_0) \qquad \begin{cases} uX + vY = 0 \\ u'X + v'Y = 0 \end{cases}$$

n'a que la solution nulle $X = 0$, $Y = 0$.

(iii) *Le système d'équations linéaires*

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} uX + vY = x \\ u'X + v'Y = y \end{cases}$$

possède une solution quelles que soient les valeurs des seconds membres x et y ;

(iv) $uv' - vu' \neq 0$.

Démonstration. Si $u = u' = v = v' = 0$, les quatre assertions sont fausses, on peut dire que dans ce cas elles sont équivalentes.

On doit donc étudier le cas où l'un de ces coefficients est non nul. On peut supposer que le coefficient u est non nul. Les autres cas se traitent de la même façon : la meilleure façon de le voir consiste à échanger les deux lignes, ou la place de X et celle de Y, ou à faire les deux échanges, selon ce qui est nécessaire. Si par exemple on sait que $v' \neq 0$, on écrira le système (S) sous la forme équivalente

$$\begin{cases} v'Y + u'X = y \\ vY + uX = x \end{cases}$$

Ce qui compte au fond, c'est que le premier coefficient de la première ligne soit $\neq 0$. À partir de là, on fera les mêmes opérations et les mêmes remarques que celles qui vont suivre.

On observe pour commencer qu'on obtient un système (S′) équivalent à (S) si on ajoute à la seconde ligne un multiple de la première :

$$\text{(S}'\text{)} \qquad \begin{cases} uX \quad + \quad vY = x \\ \qquad \left(v' - \dfrac{u'}{u}v\right)Y = y - \dfrac{u'}{u}x \quad \left(L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{u'}{u}L_1\right) \end{cases}$$

Posons pour y voir plus clair $\delta = v' - \frac{u'}{u}v = \frac{uv'-vu'}{u}$. Il est clair que $\delta \neq 0 \Leftrightarrow uv' - vu' \neq 0$. Le système (S′) s'écrit

$$\text{(S}'\text{)} \qquad \begin{cases} uX + vY = x \\ \qquad \delta Y = y - \dfrac{u'}{u}x \end{cases}$$

(iv) $\Leftrightarrow$ (i). Supposons (iv). Alors $\delta \neq 0$ le système a une solution et une seule quels que soient les second membres : on tire Y de la seconde équation et après avoir reporté la valeur de Y dans la première équation, on tire X de celle-ci.

Supposons que l'assertion (iv) ne soit pas vérifiée[3]. Ceci signifie que $\delta = 0$. Dans ce cas, lorsque $x = y = 0$, le système se réduit à la première équation, et alors il y a une infinité de solutions, puisqu'on peut donner à Y une valeur

3. Si P et Q sont deux assertions, pour prouver que P $\Leftrightarrow$ Q, c'est-à-dire que P $\Rightarrow$ Q et Q $\Rightarrow$ P, on peut montrer que P $\Rightarrow$ Q et (non P) $\Rightarrow$ (non Q).

arbitraire (toute valeur qui nous conviendra) et en déduire X. L'assertion (i) n'est pas vérifiée non plus.

(iv) $\Leftrightarrow$ (ii). Le système (S_0) est équivalent à

$$\begin{cases} uX + vY = 0 \\ \delta Y = 0 \end{cases}$$

Si $\delta \neq 0$, on voit immédiatement que le système n'a que la solution nulle, d'où (ii).

Si $\delta = 0$, le système se réduit à l'unique équation $uX + vY = 0$. Il possède par exemple la solution $Y = 1, X = -v/u$ et il a donc d'autres solutions que la solution nulle. L'assertion (ii) n'est pas vérifiée.

(iv) $\Leftrightarrow$ (iii). Si $\delta \neq 0$, le système (S') possède une solution quels que soient x et y, on l'a déjà vu. D'où (iii).

Si $\delta = 0$, le système (S') ne possède aucune solution lorsque $x = 0$, $y = 1$, et l'assertion (iii) n'est pas vérifiée. □

16. Théorème. *Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base donnée de $\overrightarrow{P}$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\overrightarrow{P}$.*

(ii) *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.*

(iii) *Tout vecteur de $\overrightarrow{P}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(iv) *$uv' - vu' \neq 0$, où u et u' sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et v et v' celles du vecteur $\vec{v}$.*

De plus, lorsque ces conditions sont satisfaites, les coordonnées X, Y *d'un vecteur dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ s'obtiennent à partir des coordonnées x, y de ce vecteur dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en résolvant le système d'équations linéaires équivalent à la relation*

$$X\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Chacun des points de cet énoncé est la traduction, dans le dictionnaire du n° 14 du point correspondant du théorème précédent. □

Exercice. *a*) On pose $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Vérifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base. Écrire les formules permettant de calculer les coordonnées X, Y d'un vecteur dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction des coordonnées (x, y) du vecteur dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Soit O un point de P et soit Ω le point de coordonnées $(3, 4)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Écrire les formules permettant de calculer les coordonnées X, Y d'un point du plan dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ en fonction des coordonnées (x, y) de ce point vecteur dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

17. Définition. Déterminant de deux vecteurs dans une base. On pose

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - uv'.$$

Cette quantité est appelée *déterminant* des vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$

Lorsque deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ respectivement par les colonne $\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$, on pose

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

et on dit que cette quantité est le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On peut considérer que $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ est le déterminant des éléments (u, u') et (v, v') de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique.

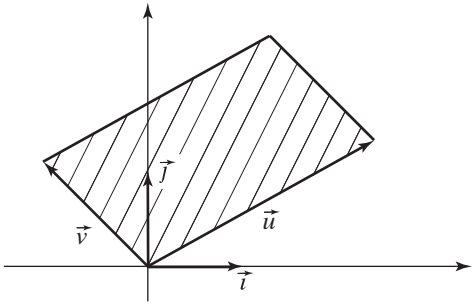

Fig. 5. Le déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée a pour valeur absolue l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs

18. Interprétation du déterminant. À chaque couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ on peut faire correspondre un parallélogramme $\mathrm{P}_{\vec{u},\vec{v}}$: l'ensemble des points de la forme $\mathrm{M} = \mathrm{O} + s\vec{u} + t\vec{v}$ où s et t décrivent l'intervalle $[0, 1]$.

On montre que le déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est égal au rapport des aires des parallélogrammes $\mathrm{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ et $\mathrm{P}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}}$. Le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires est celui où le parallélogramme correspondant est aplati, et donc d'aire nulle.

Si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormée, l'aire du parallélogramme associé, qui est un carré de côté 1, est prise comme unité d'aire, et dans ce cas

$$\left|\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})\right| = \mathrm{aire}(\mathrm{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

D'autre part, quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, le signe du déterminant est positif si la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est orientée dans le même sens que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, il est négatif si elle est orientée en sens contraire (voir fig. 6).

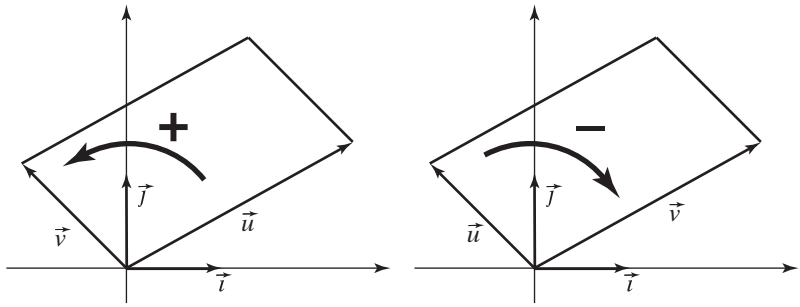

Fig. 6. Signe du déterminant

§ 5. Barycentre

19. Théorème et définition. *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des points et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *des scalaires tels que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

On choisit un point O *(origine), et on pose*

$$\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}.$$

Alors, quel que soit le point O *choisi, le point* G *est toujours le même. Il ne dépend donc que des points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et des scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

On dit que G *est le barycentre des points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *affectés des coefficients* (ou *poids*) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Démonstration. Par hypothèse $\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}$. Prenons un autre point origine O′ et définissons le point G′ par la relation

$$\overrightarrow{O'G'} = \lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{O'A_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{O'A_n}$$

Calculons $\overrightarrow{OG'}$ en observant que puisque $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a

$$\overrightarrow{OO'} = \lambda_1 \overrightarrow{OO'} + \lambda_2 \overrightarrow{OO'} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OO'}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG'} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G'} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{OO'} + \lambda_2 \overrightarrow{OO'} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OO'} + \lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{O'A_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{O'A_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_2} - + \cdots + \lambda_n(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_n}) \\
&= \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OA_n} \\
&= \overrightarrow{OG}.
\end{aligned}$$

Donc $G' = G$. □

20. Notation. On posera

$$G = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n.$$

Attention, cette notation n'a de sens que si $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

21. *Exemple.* Le point $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ est appelé *milieu* des points A et B. Le point $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ est le barycentre des trois points A, B, C (quand les coefficients sont égaux, on ne les mentionne pas[4]).

22. Extension au cas où $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ n'est pas égal à 1. Si $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, on appelle par extension *barycentre des points* A_1, A_2, …, A_n *affectés des coefficients* (ou *poids*) λ_1, λ_2, …, λ_n le point

$$G = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} A_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} A_n.$$

Cela a un sens puisque la somme des coefficients a pour valeur

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = 1.$$

23. Propriété d'associativité des barycentres. Lorsque G est le barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on peut remplacer un certain nombre de points $A_1, \ldots, A_n$ par leur barycentre, à condition de lui affecter la somme des coefficients des points.

Par exemple, si B est le barycentre des points $A_1, \ldots, A_k$ affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ alors G est aussi le barycentre des points B, $A_{k+1}, \ldots, A_n$ où B est affecté du coefficient $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et où $A_{k+1}, \ldots, A_n$ conservent leurs coefficients.

Pour que ceci soit vrai, il faut tout de même supposer que $\lambda_1, \ldots \lambda_k \neq 0$. La démonstration est immédiate.

On peut bien entendu répéter l'opération ou appliquer la propriété dans l'autre sens. Par exemple, si I est le milieu de BC, on a

$$(1-t)A + tI = (1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C.$$

Exercice. Soient A, B, C trois points, A′ le milieu de B et C, B′ le milieu de C et A, C′ le milieu de A et B. Montrer que le barycentre de A′, B′, C′ est le même que celui de A, B, C.

4. On peut aussi quand les coefficients sont égaux utiliser le terme *isobarycentre*. Même si ce terme de création récente est inusité en dehors de l'enseignement secondaire français, son étymologie transparente permet à chacun de deviner instantanément ce qu'il veut dire.

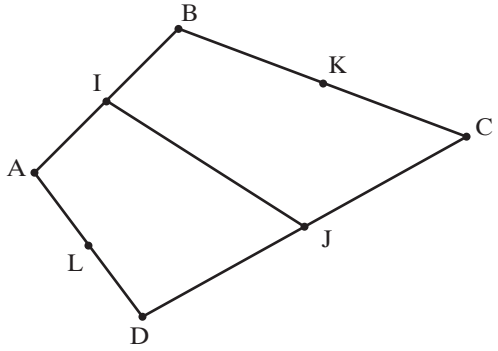

Fig. 7. *Associativité des barycentres.* Le barycentre des quatre points A, B, C, D est égal au barycentre des milieux I et J, c'est-à-dire au milieu de IJ. Conséquence : les médianes IJ et KL se coupent en leurs milieux. Conséquence : IKJL est un parallélogramme. Si la figure est dans l'espace, alors les points IJKL sont dans un même plan.

24. Barycentre et moyenne. Au moins dans le cas où les coefficients sont > 0, on peut considéré le barycantre G comme la moyenne des points $A_1, \ldots, A_n$. D'ailleurs dans un repère quelconque, les coordonnées de G sont les moyennes de celles des points $A_1, \ldots, A_n$. Dans l'espace, par exemple, on a

$$x_G = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} x_{A_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} x_{A_n}$$
$$y_G = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} y_{A_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} y_{A_n}$$
$$z_G = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} z_{A_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} z_{A_n}$$

Le fait que le choix de l'origine ne joue aucun rôle dans la définition des barycentres correspond au fait que, pour calculer une moyenne, on peut retrancher un même nombre à tous les nombres dont on calcule la moyenne, puis le rajouter au résultat obtenu.

Matières	Math.	Phys.	Éco.	Info.	TOTAL	MOYENNE
Coefficients	2	1	1	1	5	1
Notes	12	11	9	8	52	10,40
Écart à 10	2	1	−1	−2	2	0,40

Cela peut, si nécessaire, se justifier par un calcul comme

$$\frac{1}{5}(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{1}{5}(2(x_1 - 10) + (x_2 - 10) + (x_3 - 10) + (x_4 - 10)) + 10,$$

qui est, aux notations près, exactement le même que celui qui a été fait dans la démonstration du théorème.

§ 6. Définition des droites et des plans

25. Définition. Droite définie par deux points. Soient A et B deux points *distincts* du plan ou de l'espace. La *droite passant par* A *et* B est l'ensemble, noté[5] (AB), des barycentres des points A et B.

En notation condensée :

$$(\mathrm{AB}) = \{s\mathrm{A} + t\mathrm{B} \mid s, t \in \mathbb{R} \text{ tels que } s + t = 1\},$$

ou, puisque forcément $s = 1 - t$,

$$(\mathrm{AB}) = \{(1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

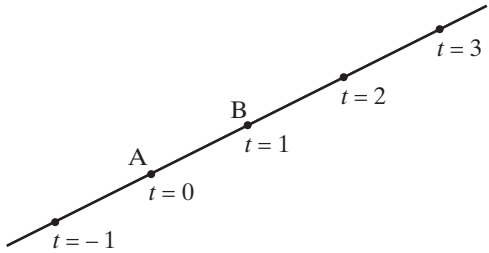

Fig. 8. Droite définie par deux points

26. Droite définie par un point et un vecteur. On remplace immédiatement cette définition élégante par une autre, équivalente et d'usage plus courant, qui fait intervenir un point et un vecteur. Fixons une origine O. Si M est un point de la droite, on a pour un certain t réel

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

ou bien

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Puisque, A étant donné, tout vecteur $\vec{u} \neq 0$ s'écrit d'une façon et d'une seule $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, où B est un point distinct de A, ceci conduit à la définition équivalente des droites :

La droite D *d'origine* A *et de vecteur directeur* $\vec{u}$ est l'ensemble décrit par le point $\mathrm{M} = \mathrm{A} + t\vec{u}$ quand t décrit $\mathbb{R}$. Ou en notation condensée :

$$\mathrm{D} = \{\mathrm{A} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

5. On omet souvent les parenthèses. Du moment qu'on écrit *la droite* AB, ce n'est pas un problème.

Il y a d'autres façons de dire la même chose : on dit que la droite D est définie par l'*équation paramétrique* (vectorielle)

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ou bien, en coordonnées dans un repère fixé, en supposant que A ait pour coordonnées a, b, c et $\vec{u}$ pour coordonnées u, v, w, par les *équations paramétriques* (scalaires)

$$\begin{cases} x = a + tu \\ y = b + tv \\ z = c + tw \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(en géométrie plane, les équations sont similaires : on ne garde que les deux premières coordonnées).

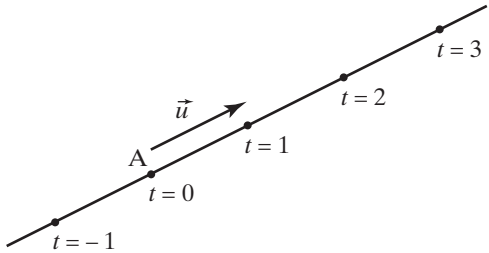

Fig. 9. Droite définie par un point et un vecteur

On peut encore présenter d'une autre façon la représentation paramétrique. On dit que $(\mathrm{A}, \vec{u})$ est un *repère de la droite* D, et si $\mathrm{M} = \mathrm{A} + t\vec{u}$ on dit que t est *l'abscisse de* M *dans le repère* $(\mathrm{A}, \vec{u})$.

Enfin, on appelle vecteur *porté par* D ou *parallèle à* D (c'est synonyme) tout vecteur de la forme $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ où P et Q sont des points de D. Si $(\mathrm{A}, \vec{u})$ est un repère de D, les vecteurs portés par D sont exactement les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

27. Indiquons sans démonstration quelques propriétés. La droite déterminée par deux points distincts A et B est l'unique droite passant par ces points. Elle peut être déterminée de la même façon par deux quelconques de ses points, pourvu qu'ils soient distincts.

La droite D déterminée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ peut être déterminée de la même façon par n'importe quel de ses points et n'importe quel vecteur non nul colinéaire au vecteur $\vec{u}$. C'est pourquoi on appelle *vecteurs directeurs* de D tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.

28. Droites parallèles. On dit que deux droites sont *parallèles* si l'une des droites est image de l'autre par une translation.

Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires.

29. La première définition qu'on rencontre des droites parallèles est aussi celle qu'on trouve dans les dictionnaires : « Se dit de deux droites qui ne se rencontrent pas. »

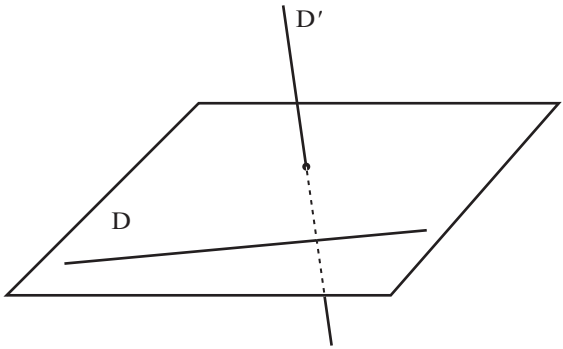

Fig. 10.

Mais cette définition est limitée à la géométrie plane : il y a dans l'espace des droites qui ne se rencontrent pas et que personne n'a envie d'appeler parallèles, par exemple les droites D et D′ de la figure 10. La définition est en fait la suivante : deux droites de l'espaces sont dites parallèles si premièrement, elles sont contenues dans un même plan, deuxièmement elles ne se rencontrent pas.

C'est pour avoir une définition à la fois commode et générale que nous avons utilisé la translation. Une conséquence de ce choix est que deux droites confondues doivent être appelées parallèles : elles sont image l'une de l'autre par la translation de vecteur $\vec{0}$, qui n'est autre que la transformation identité.

30. Droites orthogonales. On dit que deux droites sont *orthogonales* si tout vecteur porté par l'une est orthogonale à tout vecteur porté par l'autre.

Pour cela, il faut et il suffit que ce soit le cas pour un vecteur directeur de l'une et un vecteur directeur de l'autre.

31. Segment. Le segment [AB] est par définition l'ensemble des barycentres à coefficients $\geqslant 0$ de A et B :

$$[\mathrm{AB}] = \{s\mathrm{A} + t\mathrm{B} \mid s, t \in \mathbb{R} \quad \text{tels que } s + t = 1, s \geqslant 0, t \geqslant 0\},$$

ou encore

$$[\mathrm{AB}] = \{(1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B} \mid t \in [0,1]\}$$

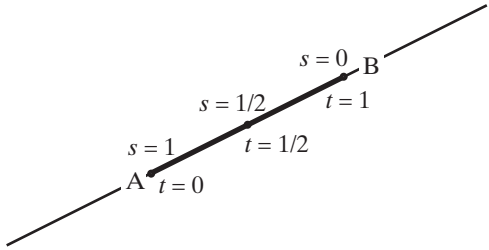

Fig. 11. Segment [AB]

Mais on a plus simplement

$$[\mathrm{AB}] = \{\mathrm{A} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mid t \in [0,1]\}$$

On dit que le segment [AB] est paramétré par $[0,1]$. Le point A (origine) est le point de paramètre 0, le point B (extrémité) est le point de paramètre 1, le milieu est le point de paramètre $1/2$.

Puisque $[\mathrm{AB}] = [\mathrm{BA}]$ on dit aussi que A et B indifféremment sont les extrémités du segment. La *longueur* du segment est par définition la distance des extrémités.

32. Triangles Ce qu'on appelle *triangle,* c'est selon le cas :

- trois points (non alignés) ;
- trois segments ;
- trois droites ;
- une portion du plan (voir figure)

Il n'y a pas de problème à définir un triangle par n'importe laquelle des ces données, car chacune de ces données détermine les trois autres.

Par exemple la portion du plan appelée triangle ABC est l'ensemble des barycentres à coefficients $\geqslant 0$ des points A, B et C.

Comment en sens inverse récupérer les sommets à partir de la donnée d'une portion du plan Δ de forme triangulaire ? Ce sont les points M de Δ qu'on ne peut pas écrire comme barycentre à coefficients > 0 de deux points de Δ distincts de M. Ou pour dire la même chose géométriquement, les sommets de Δ sont les points qu'on ne peut pas considérer comme points intérieurs d'un segment [PQ] où P et Q sont aussi dans Δ mais distincts de M (voir figure fig2db).

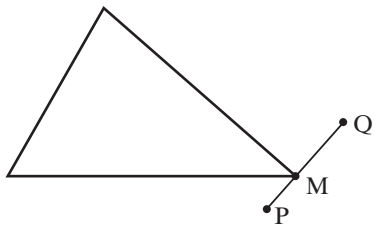

Fig. 12. Un sommet du triangle est un point du triangle qui n'est pas barycentre à coefficients > 0 de deux autres points du triangle

33. Repères barycentriques. *Soient* A, B, C *trois points non alignés. Alors tout point* M *du plan s'écrit d'une façon et d'une seule* $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{C}$ *avec* $\alpha + \beta + \gamma = 1$. On dit que trois points non alignés forment un *repère barycentrique.*

Pour prouver cette propriété, on commence par remarquer que, puisque nécessairement $\alpha = 1 - \beta - gamma$,il revient au même de dire que tout point du plan M peut s'écrire $\mathrm{M} = (1 - \beta - \gamma)\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{C}$ d'une façon et d'une seule.

On observe par ailleurs que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont non colinéaires (sinon A, B, C seraient alignés). Par suite $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère du plan, ce qui signifie que tout point du plan peut s'écrire $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ d'une façon et d'une seule.

Pour conclure, il suffit donc d'observer que

$$\begin{aligned}\mathrm{M} = (1 - \beta - \gamma)\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} = (1 - \beta - \gamma)\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{A} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

(pour la première ligne, on utilise la définition de barycentre en prenant A comme point O).

34. Régionnement du plan associé à un triangle. Les différentes parties du plan délimitées par les côtés d'un triangle peuvent être caractérisées par le signe de α, β, γ qu'on appelle parfois *coordonnées barycentriques.*

Commençons par le régionnement défini sur une droite par deux points :

On en déduit le régionnement défini par trois points non alignés et les trois droites qui les joignent : pour savoir quels sont les signes des coefficients α, β, γ d'un point M donné, on trace la droite AM qui sauf exception recoupe la droite BC en un point N. On écrit M comme barycentre de A et N en : $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{A} + \nu\mathrm{N}$ ($\alpha + \nu = 1$; s'inspirer de la figure 13 pour déterminer les signes de α et ν), puis N sous la forme $\delta\mathrm{B} + \varepsilon\mathrm{C}$ ($\delta + \varepsilon = 1$), et on a enfin $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{A} + \nu\delta\mathrm{B} + \nu\varepsilon\mathrm{C}$. D'où le régionnement :

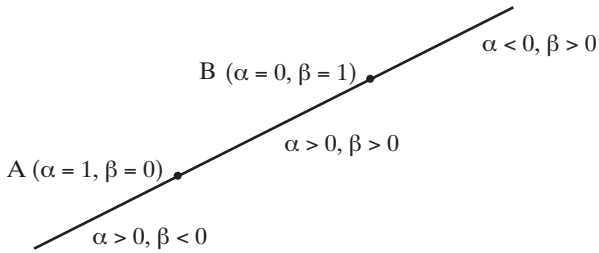

Fig. 13. Position par rapport à A et B du point $\alpha A + \beta B$ ($\alpha + \beta = 1$)

35. Autres figures de géométrie plane. Un *quadrilatère,* c'est plus compliqué qu'un triangle. Le mot signifie *quatre côtés*. On dira qu'un quadrilatère, c'est

- quatre segments AB, BC, CD, DA ;
- quatre droites (les quatre droites qu'on obtient en prolongeant ces segments) ;

Mais la donnée de l'ensemble des quatre points A, B, C, D (les *sommets*) ne suffit pas à déterminer le quadrilatère : avec les mêmes quatre points, on peut en effet obtenir

Dans le premier cas, on a un quadrilatère *croisé,* dans le second un quadrilatère *non croisé.*

Si on part de ABCD, on obtient le même quadrilatère en effectuant une permutation circulaire des sommets : BCDA, CDAB, DABC, ou en renversant l'ordre des sommets : DCBA, ADBC, BADC, CBAD. Si on échange deux sommets, on obtient un quadrilatère différent. Mais attention, si le quadrilatère ABCD est non croisé, pour fixer les idées, il y a deux façons d'échanger les sommets, qui correspondent à deux quadrilatères croisés différents :

Comme chacun de ces trois quadrilatères peut être parcouru de huit façons différentes, on retrouve ainsi les $4! = 24$ permutations de quatre lettres A, B, C, D.

Pour un quadrilatère croisé Q, il n'est pas possible de définir une partie du plan délimitée par Q. On peut si on insiste, mais on n'a pas quelque chose qui ait des propriétés intéressantes.

Dans un quadrilatère, on a les notions de

- côtés adjacents (un sommet en commun) ;
- côtés opposés (pas de sommet en commun) ;
- diagonale (segment ou droite joignant deux sommets n'appartenant pas à un même côté).

Par exemple, dans la figure 16, où ABCD est un carré, dans le premier quadrilatère croisé les diagonales sont les droites parallèles AB et CD, dans le second ce sont les droites parallèles AD et BC.

Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont pa-

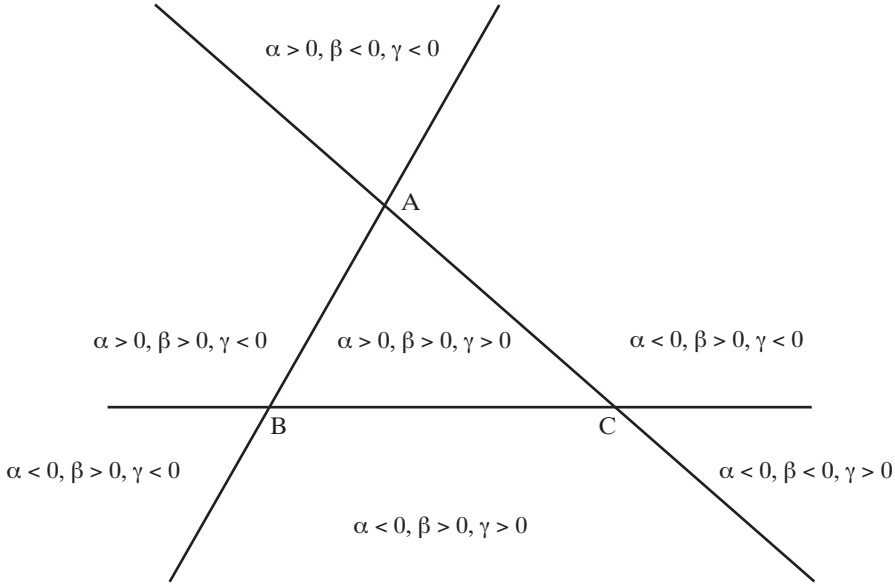

Fig. 14. Régionnement du plan par les côtés d'un triangle

rallèles. On montre (voir exercices) qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée (et seulement dans ce cas) :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
- les diagonales se coupent en leur milieu.

Un *losange* est un parallélogramme dont les quatre côtés ont même longueur (dans un parallélogramme général, les côtés opposés ont même longueur). Un *rectangle* est un parallélogramme dont les côtés adjacents sont perpendiculaires. Un *carré* est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.

36. Définition. Plan défini par trois points. Soient A, B, C trois points de l'espace *non alignés*, c'est-à-dire non situés sur une même droite. Par définition, le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

En notation condensée :

$$(\mathrm{ABC}) = \{r\mathrm{A} + s\mathrm{B} + tc \mid r, s, t \in \mathbb{R} \text{ tels que } r + s + t = 1\},$$

ou, puisque forcément $r = 1 - s - t$,

$$(\mathrm{AB}) = \{(1 - s - t)\mathrm{A} + s\mathrm{B} + t\mathrm{C} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

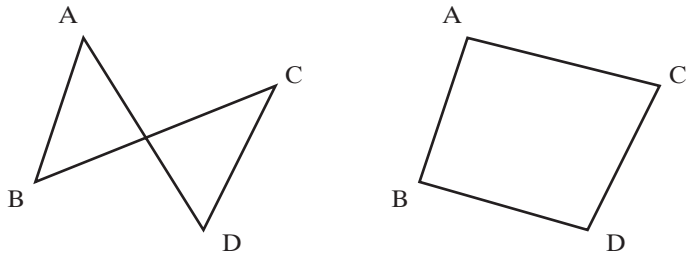

Fig. 15.

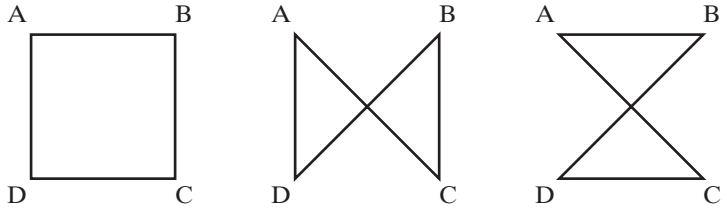

Fig. 16.

37. Définition. Plan défini par un point et deux vecteurs. On va remplacer cette définition par une définition plus maniable (plus maniable seulement parce qu'on est plus habitué à additionner des vecteurs qu'à manipuler des barycentres).

D'après la dernière des formules ci-dessus, un point M appartient au plan $P = (ABC)$ s'il est de la forme $M = (1 - s - t)A + sB + tC$. Introduisons une origine O. On a

$$\begin{aligned} M = (1-s-t)A + sB + tC &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow M = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow M = A + s\vec{u} + t\vec{v}, \end{aligned}$$

en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, car sinon on aurait par exemple $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et les points A, B, C seraient alignés. Inversement si on se donne deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les points A, $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ ne sont pas alignés.

On peut donc définir un plan à partir d'un point A et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en posant

$$\mathrm{P} = \{\mathrm{A} + s\vec{u} + t\vec{v} | s, t \in \mathbb{R}\}$$

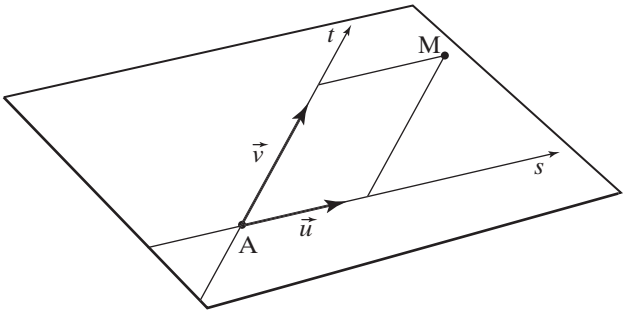

Fig. 17. Plan défini par un point et deux vecteurs

Une autre façon de dire exactement la même chose est de dire que P est défini par la représentation paramétrique (à deux paramètres)

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + s\vec{u} + t\vec{v} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

La parenthèse se lit : « où s et t décrivent $\mathbb{R}$ ». En coordonnées dans un repère donné, la représentation paramétrique s'écrit

$$(1) \qquad \begin{cases} x &= a + su + tv \\ y &= b + su' + tv' \\ z &= c + su'' + tv'' \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

38. Repères d'un plan et représentations paramétriques. On dit aussi, puisque tout point M du plan P s'écrit d'une façon et d'une seule $\mathrm{M} = \mathrm{A} + s\vec{u} + t\vec{v}$, avec $s, t \in \mathbb{R}$, que $(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan P, et que s et t sont les coordonnées du point M dans ce repère.

39. Vecteurs portés par un plan. Repères d'un plan et représentations paramétriques. On dit qu'un vecteur $\vec{x}$ est porté par un plan P, ou parallèle à P s'il existe deux points M et N de ce plan tels que $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. Si $(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan P, les vecteurs portés par P sont les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

40. Les différents repères d'un plan. *Pour qu'un triplet* $(\mathrm{A}', \vec{u}', \vec{v}')$ *où* A *est un point du plan* P *et où* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *soient un repère du plan* P *soit un repère de* P*, il faut et il suffit que* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *soient indépendants.*

On en déduit que si $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ sont trois points alignés d'un plan P, le plan P est le plan défini par ces trois points. Pour le voir, on observe que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont indépendants et que $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est donc un repère de P. On raisonne ensuite comme au n° 33.

Exercice. Donnez un repère, puis un repère orthonormé du plan d'équations paramétriques $x = 1 + s - t$, $y = 2 + s + t$, $z = s + t$.

41. Plans parallèles. On dit que deux plans sont parallèles si l'un est l'image de l'autre par une translation (si P′ est l'image de P par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors P est l'image de P′ par la translation de vecteur $-\vec{u}$).

42. Droite parallèle à un plan. On dit qu'une droite D est parallèle à un plan P s'il existe une translation qui amène D dans P. Il revient au même de demander que D soit parallèle à une droite contenue dans P.

§ 7. Produit scalaire, norme, distance

43. Théorème de Pythagore (vecteurs). *Pour que deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2. \tag{2}$$

On a

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \,.\, (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{x} \,.\, \vec{x} + \vec{x} \,.\, \vec{y} + \vec{y} \,.\, \vec{x} + \vec{y} \,.\, \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \,.\, \vec{y}.\end{aligned}$$

On a donc (2) si et seulement si $\vec{x} \,.\, \vec{y} = 0$.

Le véritable théorème de Pythagore traite de segments, de longueurs (et non de distances de points), et ce que nous notons AB^2 n'était pas considéré comme le carré d'un nombre, mais comme une aire. En voici une version approchée.

44. Théorème de Pythagore (points). *Soient* A, B, C *trois points. On a*

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}} \Longleftrightarrow \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

On applique le théorème précédent en prenant $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

45. Définition. Repère orthonormé. On dit qu'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est orthonormée si on a

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$$
$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$$

On dit qu'un repère $\mathcal{B} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de E est orthonormé si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée.

46. Théorème. *Il existe dans* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ *des bases orthonormées*

Démonstration. Dans $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, il y a une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, non orthonormée a priori. On va construire a partir de cette base une base orthonormée.

a) Commençons par construire une base $(\overrightarrow{\mathrm{I}}, \overrightarrow{\mathrm{J}}, \overrightarrow{\mathrm{K}})$ orthogonale (c.à.d. formée de vecteurs deux à deux orthogonaux).

On prend d'abord
$$\overrightarrow{\mathrm{I}} = \vec{u},$$
puis
$$\overrightarrow{\mathrm{J}} = \vec{v} + \alpha\vec{u},$$
en choisissant α de façon à ce que $\overrightarrow{\mathrm{I}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J}}$ soit orthogonaux. Puisque
$$\overrightarrow{\mathrm{I}}.\overrightarrow{\mathrm{J}} = \vec{u}.(\vec{v} + \alpha\vec{u}) = \vec{u}.\vec{v} + \alpha\|\vec{u}\|^2$$
et que $\|\vec{u}\| \neq 0$ (puisque $\vec{u} \neq 0$), on peut prendre
$$\alpha = -\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$$
(c'est d'ailleurs le seul choix possible). On prend enfin $\overrightarrow{\mathrm{K}}$ de la forme
$$\overrightarrow{\mathrm{K}} = \vec{w} + \beta\overrightarrow{\mathrm{I}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{J}}.$$
Pour avoir $\overrightarrow{\mathrm{I}}.\overrightarrow{\mathrm{K}} = \overrightarrow{\mathrm{J}}.\overrightarrow{\mathrm{K}} = 0$, c'est-à-dire
$$\overrightarrow{\mathrm{I}}.\vec{w} + \beta\|\overrightarrow{\mathrm{I}}\|^2 + \gamma\overrightarrow{\mathrm{I}}.\overrightarrow{\mathrm{J}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{J}}.\vec{w} + \beta\overrightarrow{\mathrm{J}}.\overrightarrow{\mathrm{I}} + \gamma\|\overrightarrow{\mathrm{J}}\|^2 = 0$$
il suffit, puisque $\overrightarrow{\mathrm{I}}.\overrightarrow{\mathrm{J}} = \overrightarrow{\mathrm{J}}.\overrightarrow{\mathrm{I}} = 0$, de prendre
$$\beta = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{I}}.\vec{w}}{\|\overrightarrow{\mathrm{I}}\|^2}, \quad \gamma = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{J}}.\vec{w}}{\|\overrightarrow{\mathrm{J}}\|^2}.$$

b) Il reste à remplacer $\overrightarrow{\mathrm{I}}, \overrightarrow{\mathrm{J}}, \overrightarrow{\mathrm{K}}$ par les vecteurs de norme 1 (on dit aussi unitaires, ou normés) associés :
$$\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{I}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{I}}\|}, \quad \vec{\jmath} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{J}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{J}}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{K}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{K}}\|}$$
(rappelons que $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\,\|\vec{v}\|$; par suite $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est de norme 1 si $\vec{v}$ est non nul).

c) Montrons maintenant que les trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ forment une base.

Montrons d'abord que tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Cela résulte du fait que tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (puisque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base) et que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, ou de $\overrightarrow{\mathrm{I}}, \overrightarrow{\mathrm{J}}, \overrightarrow{\mathrm{K}}$, cela revient au même. On tire en effet des calculs précédents
$$\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{I}},$$

puis
$$\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{J}} - \alpha\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{J}} - \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{I}},$$
et enfin
$$\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{K}} - \beta\,\overrightarrow{\mathrm{I}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{J}}.$$

Il reste à prouver que l'expression d'un vecteur quelconque $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est unique. C'est immédiat, puisqu'en faisant successivement le produit scalaire de $\vec{x} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ on obtient les relations
$$x = \vec{x}.\vec{\imath}, \quad y = \vec{x}.\vec{\jmath}, \quad z = \vec{x}.\vec{k}$$
qui montre que x, y et z ne peuvent prendre chacun qu'une seule valeur. □

47. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. On a vu au cours de la démonstration qui précède que les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée sont les produits scalaires de ce vecteur avec les vecteurs de la base : si $\vec{x} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ on a
$$x = \vec{x}.\vec{\imath}, \quad y = \vec{x}.\vec{\jmath}, \quad z = \vec{x}.\vec{k}.$$

Exercice. Soient dans $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ trois vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux. Montrer qu'ils forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

48. Calcul du produit scalaire en coordonnées. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base quelconque de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, non supposée orthonormée. Considérons les vecteurs
$$\vec{u} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$$
$$\vec{u}' = u'\vec{\imath} + v'\vec{\jmath} + w'\vec{k}$$

Le produit scalaire de ces vecteurs est
$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{u}' = {} & uu'\,\|\vec{\imath}\|^2 + uv'\,\vec{\imath}.\vec{\jmath} + uw'\vec{\imath}.\vec{k} \\ & + vu'\,\vec{\jmath}.\vec{\imath} + vv'\,\|\vec{\jmath}\|^2 + vw'\,\vec{\jmath}.\vec{k} \\ & + wu'\,\vec{k}.\vec{\imath} + wv'\,\vec{k}.\vec{\jmath} + ww'\|\vec{k}\|^2,\end{aligned}$$
soit
$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{u}' = {} & uu'\,\|\vec{\imath}\|^2 + vv'\,\|\vec{\jmath}\|^2 + ww'\,\|\vec{k}\|^2 \\ & + (uv' + vu')\,\vec{\imath}.\vec{\jmath} + (vw' + wv')\,\vec{\jmath}.\vec{k} + (uw' + wu')\,\vec{\imath}.\vec{k}\end{aligned}$$

Si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée, on a $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{\imath}.\vec{k} = 0$. On a donc dans ce cas

(3) $$\boxed{\vec{u}.\vec{u}' = uu' + vv' + ww'}$$

quels que soient les vecteurs $\vec{u} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$ et $\vec{u}' = u'\vec{\imath} + v'\vec{\jmath} + w'\vec{k}$.

De (3) on tire la formule

$$\boxed{\|\vec{u}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2}, \tag{4}$$

valable dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormée.

49. Distance dans un repère orthonormé. Considérons maintenant un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Par définition, la distance de deux points A et A′ est $d(\mathrm{A}, \mathrm{A}') = \|\overrightarrow{\mathrm{AA}'}\|$. Si le point A a pour coordonnées x, y, z et si A′ a pour coordonnées x', y', z', autrement dit si on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$
$$\mathrm{A}' = \mathrm{O} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k},$$

on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \mathrm{A}' - \mathrm{A} = \overrightarrow{\mathrm{OA}'} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x' - x)\vec{\imath} + (y' - y)\vec{\jmath} + (z' - z)\vec{k}.$$

La distance est donc donnée par la formule

$$\boxed{d(\mathrm{A}, \mathrm{A}') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.} \tag{5}$$

50. Théorème (Théorème de la projection orthogonale)**.** *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Tout vecteur $\vec{x}$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ s'écrit d'une façon et d'une seule*

$$\vec{x} = \lambda\vec{u} + \vec{z}$$

où $\vec{z}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Autrement dit, tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ se décompose en somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

Démonstration. Analyse. Supposons qu'une décomposition de la forme indiquée existe : $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \vec{z}$. Multiplions scalairement par $\vec{u}$. Par hypothèse, on a $\vec{u} \,.\, \vec{z} = 0$. On a donc $\vec{u} \,.\, \vec{x} = \lambda\|\vec{u}\|^2$ et

$$\lambda = \frac{\vec{u} \,.\, \vec{x}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

puisque $\vec{u} \neq 0$. Il n'y a donc qu'une seule valeur possible de λ, et par suite une seule valeur possible de $\vec{z}$, soit $\vec{z} = \vec{x} - \lambda\vec{u}$.

Synthèse. Vérifions qu'avec les valeurs trouvées pour λ et $\vec{z}$ les conditions sont remplies. Il suffit de vérifier que $\vec{z}$ est orthogonal à $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\vec{u} \,.\, \vec{z} &= \vec{u} \,.\, (\vec{x} - \lambda\vec{u}) \\ &= \vec{u} \,.\vec{x} - \lambda\|\vec{u}\|^2\end{aligned}$$

$$= \vec{u}\,.\vec{x} - \frac{\vec{u}\,.\,\vec{x}}{\|\vec{u}\|^2}\|\vec{u}\|^2$$
$$= 0. \qquad \square$$

51. Définition et propriétés de la projection orthogonale sur un vecteur. On dit que le vecteur $\lambda\vec{u}$ dans l'énoncé du théorème précédent est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $\vec{u}$. On note ce vecteur $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x})$.

Le vecteur $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x})$ est inchangé si in remplace $\vec{u}$ par un vecteur colinéaire (non nul). On peut donc pour simplifier supposer le vecteur $\vec{u}$ unitaire.

Enfin, on a $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) = 0$ si et seulement si $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$, que $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{x}$ si et seulement si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Montrer que $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) + \mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{y})$, que $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\alpha\vec{x}) = \alpha\,\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x})$.

Exercice. Démontrer ce qui précède.

52. Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz.)**.** *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. On a*

$$-\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \leqslant \vec{x}\,.\,\vec{y} \leqslant \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|. \tag{6}$$

(inégalité de Schwarz).

On a l'égalité $\vec{x}\,.\,\vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ quand $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires et de même sens (ce qui signifie par définition $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ ou $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ avec $\alpha \geqslant 0$); on a l'égalité $\vec{x}\,.\,\vec{y} = -\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ quand $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires et de sens contraire.

Démonstration. Pour démontrer (6) on peut utiliser une base orthonormée est observer qu'en coordonnées les inégalités (6) se traduisent par l'inégalité de Cauchy déjà démontrée au n° 25. On peut aussi utiliser directement l'idée de la démonstration de l'inégalité de Cauchy en considérant le polynôme du second degré

$$\mathrm{P}(\lambda) = \|\vec{x} - \lambda\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2\lambda\vec{x}\,.\,\vec{y} + \lambda^2\|\vec{y}\|^2.$$

Mais nous allons ici déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz du théorème de la projection orthogonale.

Si $\vec{x} = 0$, les deux inégalités de (6) sont vérifiées. On suppose donc dans la suite $\vec{x} \neq 0$.

Écrivons

$$\vec{y} = \alpha\vec{x} + \vec{z}$$

avec $\vec{z}$ orthogonal à $\vec{x}$. Les inégalités à démontrer vont découler de la comparaison entre les deux relations

$$\vec{x}.\vec{y} = \alpha\|\vec{x}\|^2$$
$$\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\sqrt{\alpha^2\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{z}\|^2}$$

Ces deux relations se déduisent de la relation $\vec{y} = \alpha\vec{x} + \vec{z}$, la première en multipliant scalairement par $\vec{x}$, la seconde grâce au théorème de Pythagore. En les comparant, on voit que (6) équivaut à la double inégalité

$$-\sqrt{\alpha^2\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{z}\|^2} \leqslant \alpha\|\vec{x}\| \leqslant \sqrt{\alpha^2\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{z}\|^2}$$

ou à

$$-\sqrt{\alpha^2 + \|\vec{z}\|^2/\|\vec{x}\|^2} \leqslant \alpha \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \|\vec{z}\|^2/\|\vec{x}\|^2}$$

(on a divisé par $\|\vec{x}\|$), ou encore à

$$\alpha^2 \leqslant \alpha^2 + \|\vec{z}\|^2/\|\vec{x}\|^2$$

Puisque $\|\vec{z}\|^2/\|\vec{x}\|^2 \geqslant 0$, les inégalités de Cauchy-Schwarz sont donc démontrées.

De plus, on a égalité quand $\vec{z} = 0$, c'est-à-dire quand $\vec{y}$ est colinéaire à $\vec{x}$. Plus précisément, on égalité dans l'inégalité de droite quand $\alpha \geqslant 0$, c'est-à-dire quand $\vec{y}$ est colinéaire à $\vec{x}$ et de même sens, et égalité dans l'inégalité de fauche quand $\alpha \leqslant 0$, c'est-à-dire quand $\vec{y}$ est colinéaire à $\vec{x}$ et de même sens. □

53. Inégalité du triangle (vecteurs) On a toujours

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \tag{7}$$

On a l'égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

C'est facile : on a

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\
&= \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
&\leqslant \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \qquad \text{(inégalité de Schwarz)} \\
&= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.
\end{aligned}$$

D'où (7) en passant aux racines carrées. On a égalité dans (7) lorsque $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, autrement dit, d'après le n° 51, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

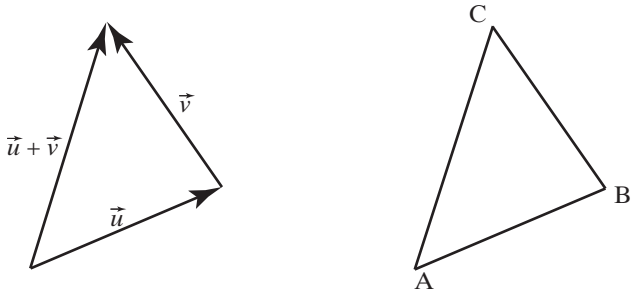

Fig. 18.

54. Inégalité du triangle (points).

$$d(\mathrm{A},\mathrm{C}) \leqslant d(\mathrm{A},\mathrm{B}) + d(\mathrm{B},\mathrm{C}). \tag{8}$$

On a égalité quand B *est un point du segment* AC.

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, on a $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| \leqslant \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|$, ce qui, de par la définition de la distance, revient à (8).

D'après le n° 53 on a égalité si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires et de même sens, ce qui équivaut à dire que B est un point du segment [AC]. (Démonstration en supposant $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \neq 0$: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ avec $\alpha \geqslant 0$ entraîne $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1+\alpha)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ avec $0 \leqslant k < 1$.)

Exercices

Exercice 1. Montrer que, si A, B, C, D forment un quadrilatère de l'espace, les milieux des côtés sont dans un même plan et forment un parallélogramme.

Exercice 2. Montrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si les diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 3. Montrer que, si ABCD est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Montrer que ABCD est un rectangle si et seulement si les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

Exercice 5. L'inégalité de Schwarz pour deux vecteurs du plan s'écrit en coordonnées dans une base orthonormée

$$|uu' + vv'| \leqslant \sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u'^2+v'^2}.$$

Démontrer cette inégalité par un calcul direct.

Exercice 6. De tous les quadrilatères planaires de même aire, lequel a le plus grande périmètre ?

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Montrer que $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2$ atteint son minimum au barycentre de A, B, C.

Exercice 8. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, donner l'équation de la médiatrice de la droite AB où $A = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$.

Exercice 9. On suppose que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\overrightarrow{P}$. On pose $I = \vec{i} + 2\vec{j}$, $J = 3\vec{i} - \vec{j}$. Montrer que (I, J) est une base de $\overrightarrow{P}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ dans la base (I, J) ?

Exercice 10. Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Donner les formules de changement de coordonnées pour cette nouvelle base (nouvelles coordonnées X, Y en fonction des anciennes x, y).

Exercice 11. On considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives dans un repère donné : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Soit M un point quelconque du plan, calculer le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$. Que remarquez-vous ?

b) Quelles sont les coordonnées des points $\frac{A-2B-3C}{-4}$ et $\frac{A-2B-3C}{-4} + \vec{u}$?

c) Exprimer D comme un barycentre de A, B, C.

Exercice 12. Soient A, B, C, D des points de l'espace de coordonnées dans un repère R : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère les points $M = t.A + (1-t).B$ et $N = u.C + (1-u).D$

a) Calculer le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Les droites (AB) et (CD) ont elles un point commun ? Sont elles parallèles ?

b) A quelle condition la droite (MN) est elle perpendiculaire à (AB) et (CD) ?

Exercice 13. Rappeler une caractérisation en terme de barycentre des points à l'intérieur d'un triangle. Montrer que pour tous les points à l'intérieur d'un triangle équilatéral, la somme des distances aux côtés est la même[6] . Que vaut-elle ?

Exercice 14. On se place dans un espace affine réel de dimension 3 muni d'une base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C, D de coordonnées dans cette base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que (A, B, C, D) est un tétraèdre non aplati.

b) Situer M par rapport au tétraèdre (A, B, C, D) dans les cas suivant :

i) M a pour coordonnées $-\frac{5}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ii) M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 15. On considère les points (A, B, C, D, E, F) de l'espace de coordonnées respectives dans un même repère :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

6. `http://www.larecherche.fr/content/actualite-mathematiques/article?id=25445`

a) Les points A, B, C sont ils alignés ? Et les points D, E, F ?
b) Les plans ABC et DEF sont ils égaux ?
c) Quelles sont les coordonnées de l'isobarycentre de A, B, C ?
d) Le point H de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est il dans le plan ABC ?
e) Donner une droite passant par H et parallèle à ce plan. Avez-vous tous la même réponse ?

Exercice 16. On considère un cube dans un espace euclidien de dimension 3.
a) Donner les coordonnées de ses sommets dans un repère de votre choix.
b) Montrer que les quatre grandes diagonales ont même longueur et ne sont pas deux à deux orthogonales.

Exercice 17. Montrer que dans un tétraèdre, les quatre médianes sont concourantes.

Exercice 18. On considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées dans un repère orthonormé :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Donner un vecteur $\overrightarrow{v_1}$ orthogonal à ABC et un vecteur $\overrightarrow{v_2}$ orthogonal à ADC.
b) Les hauteurs de ABCD sont elles concourantes ?

Exercice 19. Si ABCD est un rectangle, alors pour tout point M, on a $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MD}}$. Démontrez cette égalité une première fois en n'utilisant que des propriétés du produit scalaire, puis une seconde fois en calculant dans un repère d'origine le centre du rectangle, et d'axes parallèles aux côtés.

Exercice 20. Si ABCD est un rectangle, montrer que $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MC}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MD}^2$ pour tout point M de l'espace.

Exercice 21. Que peut-on dire de trois points A, B, C tels que $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2/2$?

Exercice 22. Montrer que les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales ssi les sommes des carrés des côtés opposés sont égales.

Exercice 23. Montrer que les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales ssi les médianes ont même longueur.

Exercice 24. Soient A, B, C, D quatre points de l'espace. Montrer que l'on a : $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AD}^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{DB}}$.
Applications. a) Dans un tétraèdre ABCD, montrer que AC est orthogonal à BD si et seulement si $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AD}^2$.
b) Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à deux fois la somme des carrés des longueurs des côtés.
c) Dans un triangle ABC, on note $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$, $c = \mathrm{AB}$. Soit A′ le milieu de B, C et $s_a = \mathrm{AA}'$. Soit D le symétrique de A par rapport à A′. Observer que ABCD est un parallélogramme et déduire de la question précédente la relation $s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
d) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrez que alors (AG) est orthogonale à (BG) si et seulement si $a^2 + b^2 = 5c^2$.
e) *Théorème d'Euler*. Dans un quadrilatère ABCD où les médianes sont (MN) et (PQ), montrer que l'on a $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = 2(\mathrm{MN}^2 + \mathrm{PQ}^2)$.

Exercice 25. On considère le polygone régulier $\mathrm{A}_1 ... \mathrm{A}_n$ de centre O. Montrer que $\mathrm{MA}_1^2 + ... + \mathrm{MA}_n^2 - n\mathrm{MO}^2$ est indépendant de M

Chapitre 3

Retour sur la géométrie plane

§ 1. Retour sur la solution de deux problèmes classiques

1. Problème 1. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes

2. Première méthode. Démonstration analytique, c'est-à-dire en coordonnées. Les points de la hauteur (AH) issue de A sont définis par la condition

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0,$$

qui s'écrit en coordonnées

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y-a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c-b \\ c'-b' \end{pmatrix} = 0.$$

soit

$$\text{(AH)} \qquad (c'-b')(x-a) + (c-b)(y-a') = 0.$$

Pour les équations des deux autres hauteurs, il est inutile de refaire le calcul : on peut les obtenir par permutation circulaire :

$$a \to b \to c \to a$$
$$a' \to b' \to c' \to a'$$

(avantage secondaire : les expressions qu'on obtient ainsi par permutation circulaire sont disposées de façon similaire, ce qui facilite les comparaisons et les calculs). On obtient

$$\text{(BK)} \qquad (a'-c')(x-b) + (a-c)(y-a') = 0.$$

et

$$\text{(CL)} \qquad (b'-a')(x-c) + (b-a)(y-c') = 0.$$

Comment montrer que ces trois droites sont concourantes ?

(a) La méthode brutale. On calcule, en résolvant un système de deux équations à deux inconnues, les coordonnées du point d'intersection des deux premières droites, et on vérifie en reportant dans la troisième équation.

(b) Le déterminant. Il faut développer les trois équations, ce qui donne

$$(c'-b')x + (c-b)y - (c'-b')a - (c-b)a' = 0$$

$$(a' - c')x + (a - c)y - (a' - c')b - (a - c)b' = 0$$
$$(b' - a')x + (b - a)y - (b' - a')c - (b - a)c' = 0$$

On peut montrer que les droites sont concourantes en vérifiant que

$$\begin{vmatrix} c' - b' & c - b & -(c' - b')a - (c - b)a' \\ a' - c' & a - c & -(a' - c')b - (a - c)b' \\ b' - a' & b - a & -(b' - a')c - (b - a)c \end{vmatrix} = 0.$$

L'énoncé qu'on utilise affirme que si ce déterminant est nul, nos droites sont concourantes ou parallèles, mais il est bien clair qu'elles ne sont pas parallèles, puisque deux d'entre elles, par exemple sont perpendiculaires respectivement à deux côtés du triangle, non parallèles par définition.

(c) Il y a plus simple : en observant bien les équations, on voit que si on les additionne, le terme en x et le terme en y disparaissent. Pour le terme constant, c'est moins évident, il faut développer, mais la somme des termes constants est aussi zéro. On a donc $(1) + (2) + (3) = 0$, d'où $(3) = -(1) - (2)$. Tout point vérifiant à la fois les équations (1) et (2) vérifie l'équation (3).

3. Deuxième méthode. Démonstration analytique, mais en choisissant le repère. On prend comme axe des x la droite (BC), comme origine le point H, et comme axe des y la droite (AH). On peut donc supposer $\mathrm{A} = (0, a)$, $\mathrm{B} = (b, 0)$, $\mathrm{C} = (c, 0)$.

L'équation de la hauteur (BK) est facile à écrire, c'est celle de la droite passant par B et orthogonale à AC, autrement dit

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} . \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0,$$

soit, en coordonnées,

$$\text{(BK)} \qquad -c(x - b) + ay = 0.$$

L'équation de (CL) s'obtient en échangeant les rôles de B et C :

$$\text{(CL)} \qquad -b(x - c) + ay = 0.$$

En résolvant le système formé par ces deux équations, on obtient

$$x = 0, \quad y = -\frac{bc}{a}.$$

Le point d'intersection des deux hauteurs est bien situé sur la troisième hauteur.

On peut noter que le système a une solution unique parce que son déterminant est $a(b - c)$, et que la non-nulmlité de $a(b - c)$ exprime exactement le fait que les points A, B, C sont distincts et non alignés.

4. Troisième méthode. Avec le produit scalaire. Soit M le point d'intersection de (BK) et (CL). Il faut montrer que l'appartenance de M aux deux hauteurs (BK) et (CL) autrement dit la relation

$$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CM} = 0$$

entraîne l'appartenance de M à (AH), c'est-à-dire $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$. Utilisons la relation de Chasles pour intercaler A entre B et C, et B entre A et M. On obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AM} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\,.\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \\
&= \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BM} && \text{(puisque } \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0) \\
&= \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\,.\,(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) && \text{(Chasles encore une fois)} \\
&= \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} && \text{(puisque } \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CM} = 0) \\
&= \overrightarrow{0}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0.
\end{aligned}$$

5. Quatrième méthode. Géométrie pure. Menons par les sommets A, B, C les parallèles aux côtés opposés, respectivement BC, CA, AB. Ces trois droites définissent un nouveau triangle A′B′C′, le point A′ étant situé sur B′C′, et de même B sur C′A′ et C sur A′B′.

Dans le parallélogramme BCB′A on a AB′ = BC, et dans le parallélogramme BCAC′ on a BC = C′A. Le point A′ est donc le milieu du côté B′C′ du nouveau triangle. La hauteur menée de A dans ABC est perpendiculaire à B′C′, puisqu'elle est perpendiculaire à la parallèle BC, c'est donc aussi la médiatrice de B′C′. De même les hauteurs menées de B et de C sont les médiatrices des côtés A′C′ et A′B′ du nouveau triangle. Or, on sait que dans tout triangle les médiatrices sont concourantes. On en déduit que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Commentaire. Cette démonstration élégante, on peut la chercher longtemps, très longtemps. Tandis qu'avec une démonstration analytique, qui peut donner lieu à des calculs plus ou moins pénibles selon la façon dont on s'y prend, on est pratiquement sûr d'aboutir au résultat.

6. Problème 2. Dans un triangle, les médianes sont concourantes

7. Première méthode. Démonstration analytique. On considère le triangle ABC, de sommets $A = (a, a')$, $B = (b, b')$, $C = (c, c')$. On note A′, B′, C′ les milieux des segments BC, CA, AB. Les médianes sont les droites (AA′), (BB′) (CC′). La médiane (AA′) qui joint le point de coordonnées a et a' eu point de coordonnées $\frac{b+c}{2}$ et $\frac{b'+c'}{2}$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & a' & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{b'+c'}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit, en développant par rapport à la première ligne,

$$\left(a' - \frac{b'+c'}{2}\right)x - \left(a - \frac{b+c}{2}\right)y + \frac{a(b'+c') - a'(b+c)}{2} = 0$$

Les équations de (BB′) et (CC′) s'en déduisent par les permutations circulaires $a \to b \to c \to a$ et $a' \to b' \to c' \to a'$. Les trois méthodes envisagées dans le cas des hauteurs marchent de la même façon : calculs assez pénibles pour les deux premières méthodes, et pour la troisième, le même miracle se reproduit : la somme des premiers membres des trois équations donne 0.

8. Deuxième méthode. Démonstration analytique dans un repère bien choisi. Prenons comme origine le point A, et comme vecteurs de base du repère les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C ont donc comme coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Les coordonnées des points A, B, C équations des médianes s'en d'éduisent immédiatement, ainsi que les équations des médianes :

(AA′) $\qquad x = y$

(BB′) $\qquad x + 2y = 1$

(CC′) $\qquad 2x + y = 1$

Les droites (BB′) et (CC′) se coupent au point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, qui se trouve aussi sur (AA′). C'est ce qu'on voulait démontrer.

C'est peut-être le moment d'indiquer un petit truc très utile (qu'on vient d'utiliser pour trouver les équations de (BB′) et (CC′)) : l'équation de la droite passant par les points $(a,0)$ et $(0,b)$ est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Deémonstration : cette équation est bien vérifiée par les points donnés $(a,0)$ et $(0,b)$.

9. Troisième méthode. Utilisation de l'associativité des barycentres. C'est la méthode qu'on enseigne au lycée. Considérons le point G barycentre des points A, B, C (affectés de coefficients égaux) : $\mathrm{G} = \frac{1}{3}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \frac{1}{3}\mathrm{A} + \frac{1}{3}\mathrm{B} + \frac{1}{3}\mathrm{C}$. On peut dans cette relation, remplacer les points B et C par leur barycentre, à condition de l'affecter de la somme des coefficients : $\mathrm{G} = \frac{1}{3}\mathrm{A} + \frac{2}{3}\mathrm{A}'$. Il en résulte que G est aligné avec A et A′. De la même façon, on montre que G est aligné avec B et B′, et avec C et C′.

10. Quatrième méthode. Coordonnées barycentriques. L'avantage de la méthode précédente est qu'elle explique d'une certaine façon *pourquoi* les médianes se rencontrent, ce que ne fait pas le calcul. Son (petit) défaut est qu'elle suppose le point de concours des médianes connu. Voici une méthode voisine où on ne suppose rien de connu.

Soient A, B, C trois points du plan non alignés. Tout point M d'un plan s'écrit d'une façon et d'une seule

$$\mathrm{M} = r\mathrm{A} + s\mathrm{B} + t\mathrm{C}, \quad \text{avec } r + s + t = 1$$

C'est très facile à démontrer :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{A} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

Les scalaires s et t sont simplement les coordonnées du point M dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et $r = 1 - s - t$.

On dit que A, B, C forment un *repère affine* et que r, s, t sont les *coordonnées barycentriques* de M. (Il y a trois coordonnées, mais liées par une relation – on est toujours en dimension 2).

Dans ces coordonnées, les droites (AA'), (BB'), (CC') ont respectivement pour équations $s = t$, $t = r$, $r = s$. Il est donc évident qu'un point situé sur deux de ces droites est situé sur la troisième.

11. Cinquième méthode. La démonstration du collège. Appelons I le point d'intersection des médianes BB' et CC', J le milieu de IB et K le milieu de IC. Le théorème des milieux implique que JK est parallèle à BC, et égal en longueur à la moitié de BC. Le théorème des milieux implique aussi que $\mathrm{C}'\mathrm{B}'$ est parallèle à BC et de longueur moitié. Par conséquent $\mathrm{JKA}'\mathrm{C}'$ est un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, on a donc $\mathrm{C}'\mathrm{I} = \mathrm{IK} = \mathrm{IC}$, et $\mathrm{B}'\mathrm{I} = \mathrm{IJ} = \mathrm{JB}$. Autrement dit les médianes BB' et CC' se coupent en un point I situé aux deux tiers de BB' (en partant de B) et de CC' (en partant de C). On peut refaire ce raisonnement avec les médianes AA' et BB', on montrera que ces médianes se coupent en un point situé aux deux tiers de AA' et aux deux tiers de BB'. Ce point coïncide avec le point I, ce qui montre que AA' passe par I.

§ 2. La géométrie du collège

12. Tout ce que nous avons fait devrait nous permettre de retrouver sans douleur toutes les propriétés de la géométrie du collège.

En voici une liste. En plus des propriétés ci-dessous, il faut bien évidemment connaître lcs définitions, qui ne sont pas citées ici : par exemple la définition d'un triangle isocèle, d'une hauteur, d'une médiane, d'un cercle... [D'après *Propriétés de Géométrie en 3e*, publié le 11 octobre 2006 par Jacques ROUX. `http://pedagogie.ac-toulouse.fr/col-sourezes-requista/spip.php?article38`]

Droites

1. Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

2. Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
3. Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
4. Si AC + CB = AB, alors A, C et B sont alignés.
5. Si deux droites sont parallèles et possèdent un point commun, alors elles sont confondues.

Médiatrice

1. Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu, alors c'est la médiatrice de ce segment.
2. Si une droite est la médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
3. Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
4. Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.
5. Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment, alors c'est la médiatrice de ce segment.
6. Si une droite passe par un point équidistant des extrémités d'un segment et est perpendiculaire à ce segment, alors c'est la médiatrice de ce segment.

Triangles

1. Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (Théorème de Pythagore)
2. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté. Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A. (Réciproque du théorème de Pythagore)
3. Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle. (Contraposée du Théorème de Pythagore)
4. Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
5. Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l'hypoténuse.
6. Si dans un triangle, la médiane issue d'un sommet a une longueur égale à la moitié de la longueur du côté opposé, alors le triangle est rectangle en ce sommet.
7. Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté du triangle.
8. Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle.
9. Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté, alors cette droite passe par le milieu du troisième côté du triangle.
10. Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC] et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$. (Cas particulier du théorème de Thalès)
11. Si un point appartient à la médiane d'un triangle et qu'il est situé aux deux tiers par rapport au sommet, alors c'est le centre de gravité du triangle

12. Si une droite passe par un sommet et le centre de gravité d'un triangle, alors elle coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.

13. Si un point est le point d'intersection de deux médianes d'un triangle, alors il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.

14. Si une droite passe par un sommet et l'orthocentre d'un triangle, alors elle est perpendiculaire au côté du triangle opposé à ce sommet.

15. Si une droite passe par un sommet et l'intersection de deux bissectrices d'un triangle, alors c'est une bissectrice de ce triangle.

16. (Théorème de Thalès) Soit un triangle ABC. Soit M un point de (AB) et N un point de (AC). Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$.

17. (Réciproque du théorème de Thalès) Soit un triangle ABC. Soit M un point de (AB) et N un point de (AC). Si $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

18. (Contraposée du théorème de Thalès) Soit un triangle ABC. Soit M un point de (AB) et N un point de (AC). Si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre et si deux des rapports $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}}$, $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{NC}}$, $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ sont différents, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

19. Si un triangle est isocèle, alors la hauteur issue du sommet principal est à la fois médiane, médiatrice, bissectrice et axe de symétrie.

Parallélogrammes

1. Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
2. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
3. Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
4. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.
5. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur.
6. Si un quadrilatère (non croisé) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Losanges

1. Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
2. Si un quadrilatère est un losange, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et ses quatre côtés sont égaux.
3. Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors c'est un losange.
4. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
5. Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, alors c'est un losange.
6. Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

Rectangles

1. Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
2. Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et de même longueur et ses quatre angles sont droits.
3. Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu et sont de même longueur, alors c'est un rectangle.
4. Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont le même milieu et sont de même longueur.
5. Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

6. Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

Carrés

1. Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur et un angle droit, alors c'est un carré.
2. Si un quadrilatère est un carré, alors il a quatre côtés de même longueur, quatre angles droits et ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
3. Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur, alors c'est un carré.
4. Si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales ont le même milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur.
5. Si un losange a un angle droit, alors c'est un carré.
6. Si un losange a deux diagonales de même mesure, alors c'est un carré.

Cercles

1. Si deux points sont sur un cercle, alors le centre de ce cercle est équidistant de ces deux points.
2. Si dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point du cercle, alors ce triangle est rectangle en ce point.

Angles

1. Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.
2. Si deux angles sont alternes-internes, alors ils ont la même mesure (droites parallèles coupées par une sécante).
3. Si deux angles sont correspondants, alors ils ont la même mesure (droites parallèles coupées par une sécante).
4. Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc de cercle, alors ils ont la même mesure.
5. Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

Vecteurs

1. Si $v\mathrm{AB} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, , alors ABDC est un parallélogramme.
2. Si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.
3. Quels que soient les points A, B, C du plan, on a $v\mathrm{AB} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
4. Si deux vecteurs sont égaux, alors ils ont les mêmes coordonnées.
5. Si deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, alors ils sont égaux.

Transformations

1. Par une symétrie axiale, par une symétrie centrale, par une translation, par une rotation :
   (*a*) l'image d'une droite est une droite ;
   (*b*) l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
   (*c*) l'image d'un angle est un angle de même mesure.
2. Par une symétrie centrale, par une translation, l'image d'une droite est une droite parallèle.

§ 3. Notions affines. Notions métriques

13. On a vu dans ce qui précède qu'à partir du produit scalaire on peut définir les notions de norme (ou longueur) d'un vecteur, de distance de deux points et l'orthogonalité. On verra un peu plus loin que la notion d'angle peut elle aussi être définie à partir du produit scalaire.

Par contre, le produit scalaire, ni non plus les distances ou les angles, ne jouent aucun rôle dans la définition du barycentre, des droites, des plans ou dans celle des droites parallèles.

On a l'habitude de distinguer par des noms ces deux types de notions. Les notions qui ne font intervenir que les axiomes I à V sont appelées *affines*. Celles qui font aussi intervenir le produit scalaire (axiome VI) sont appelées *métriques* (à cause de la distance : produit scalaire ou distance, c'est tout comme). Cette classification peut aussi s'appliquer aux propriétés, ou aux énoncés : le théorème de Thalès est un énoncé affine, le théorème de Pythagore est un énoncé métrique.

Exercice. On vient de dire « produit scalaire ou distance, c'est tout comme ». Montrer qu'en effet, si on connaît les distances AB, BC, CA entre trois points, on peut en déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Le tableau ci-dessous parle de lui-même. Même si la plupart des notions ne seront introduites que plus loin dans ce cours (ou pas du tout), le lecteur les connaît déjà depuis longtemps.

On pourra être surpris de voir figurer le milieu parmi les notions affines. C'est que le milieu d'un segment AB peut être défini sans référence à la distance ou à la longueur, comme le point I tel que $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Il en est de même du théorème de Thalès. Dans la dernière version de programmes de collège, son énoncé fait intervenir des rapports de longueur de segments, du type $\frac{AC}{AB}$. Mais il s'agit de longueurs de segments *portés par une même droite*. Dans les programmes précédents, il était d'ailleurs question de rapports de segments orientés, autrement dit de rapports de vecteurs colinéaires comme $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$. Pour cela, on n'a pas besoin de la notion de longueur, on n'a qu'à savoir ce que signifie la relation $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, ce qui est une question purement affine. (On peut utiliser une unité de longueur pour faire ces comparaisons, mais il est tout à fait possible d'avoir une unité de longueur différente pour chaque direction de droite.)

Les notion de longueur et de distance n'interviennent en réalité que quand on veut comparer des distances dans des directions non non parallèles.

Notions affines	**Notions métriques**
Droites parallèles	Droites perpendiculaires. Angles
Segment	Longueur d'un segment
Milieu	Longueurs égales. Médiatrice
Parallélogramme. Ellipse	Rectangle. Carré. Cercle
Médianes	Hauteurs. Bissectrices
Repère	Repère orthonormé
Translations. Homothéties	Rotations. Symétries orthogonales. Projections orthogonales
Tangente à une courbe	Normale
Énoncés de nature affine	**Énoncés de nature métrique**
Théorème de Thalès	Théorème de Pythagore

Exercice. Classer les énoncés du § 2 (La géométrie du collège) en énoncés de nature affine et énoncés de nature métrique.

Chapitre 4

Déterminants en dimension 3

1. On ne peut pas faire tous les calculs en utilisant un même repère. Dans tous les calculs liés au mouvement d'un solide, d'un véhicule par exemple, on doit utiliser un repère fixe qui représente l'environnement, et un repère lié au véhicule. La situation est identique en astronomie, où les étoiles sont fixes, mais où la direction dans laquelle pointer le télescope doit être exprimée dans un repère lié à la Terre. Idem pour les jeux vidéos. En géométrie analytique enfin, les calculs sont souvent plus simples dans un repère adapté au problème (voir le chapitre 4).

Le problème se pose donc de savoir quand trois vecteurs donnés forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Ce problème est en fait équivalent à une question de systèmes d'équations linéaires et les deux problèmes se résolvent ensemble à l'aide du déterminant.

Au-delà de la résolution des problèmes cités, la notion de déterminant possède des applications innombrables (nous en donnons quelques-unes). Elle joue en fait un rôle universel en algèbre.

§ 1. Changement de base et déterminant en dimension 3

2. Changement de base en dimension 3. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Considérons trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Ces trois vecteurs forment-ils une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$?

La réponse est similaire à ce qu'elle est en dimension 2 : en supposant que ces vecteurs aient pour coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ u, u', u'' pour $\vec{u}$, v, v', v'' pour $\vec{v}$, w, w', w'' pour $\vec{w}$, ces trois vecteurs forment une base si et seulement si le système

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} = x \\ u'\mathrm{X} + v'\mathrm{Y} + w'\mathrm{Z} = y \\ u''\mathrm{X} + v''\mathrm{Y} + w''\mathrm{Z} = z \end{cases}$$

possède une solution unique quels que soient les seconds membres x, y, z. Et pour cela, il faut et il suffit que le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

soit différent de 0. La seule différence est la définition du déterminant.

3. Déterminant de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$(1)\quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = uv'w'' + u'v''w + u''vw' - u''v'w - u'vw'' - uv''w'.$$

Cette quantité est appelée déterminant des vecteurs-colonnes $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$, $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$ (ou des neufs nombres $u, \ldots, w''$ placés dans une certaine disposition).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Lorsque les matrices-colonnes des coordonnées de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$, $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$ on pose

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

et on dit que cette quantité est le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

La formule (1) est ce qu'on appelle la *règle de Sarrus* pour le calcul des déterminants d'ordre 3. Elle n'est pas compliquée à retrouver, ou à appliquer dans chaque cas. Il y a trois termes *descendants*, précédé du signe *plus* :

$$av'c'', \quad a'v''c, \quad a''vc'$$

autrement dit $av'c''$ et les deux termes qui s'en déduisent par les permutation circulaire $a \mapsto a' \mapsto a'' \mapsto a$ et de même sur les autres lettres. Il y a trois termes *montants*, précédés du signe *moins* : $a''v'c$ et les deux termes qui s'en déduisent de la même façon : $av''c'$ et $a'vc''$. Il suffit de refaire à chaque fois le schéma :

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{array} \end{array}$$

On peut aussi calculer le déterminant en *développant par rapport à la première colonne :*

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = u \begin{vmatrix} v' & w' \\ v'' & w'' \end{vmatrix} - u' \begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix} + u'' \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$$

(l'égalité des deux membres est facile à vérifier). Les déterminants $\begin{vmatrix} v' & w' \\ v'' & w'' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$ sont appelés cofacteurs des coefficients u, u', u''. On obtient le cofacteur du coefficient u' par exemple en supprimant la colonne et la ligne où figure u', c'est-à-dire en l'occurrence la première colonne et la deuxième ligne.

Il existe d'autres formules similaires : on peut de la même façon développer le déterminant par rapport à n'importe laquelle des trois lignes ou des trois colonnes. La seule chose à savoir est quel signe il faut mettre devant le terme formé du produit d'un coefficient et de son cofacteur. Ces signes sont indiqués par le tableau suivant :

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

valable pour tous les développements. Ceci indique par exemple que le développement du déterminant par rapport à la deuxième ligne est

$$-u' \begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix} + v' \begin{vmatrix} u & w \\ u'' & w'' \end{vmatrix} - w' \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}.$$

On obtient au total six formules pour le calcul du déterminant, dont la vérification est immédiate.

4. Définition. Vecteurs liés, vecteurs indépendants. Généralisons au cas d'un nombre quelconque de vecteurs les notions de vecteurs liés et de vecteurs linéairement indépendants.

On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ tout vecteur de la forme $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$

On dit que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont *liés* si l'un d'eux est combinaison linéaire des autres. On dit que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont *linéairement indépendants* si aucun n'est combinaison linéaire des autres.

Les définitions équivalentes suivantes sont souvent plus maniables, puisqu'elles ne mettent en jeu qu'une seule condition, au lieu de n : Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont *liés* s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *non tous nuls* tels que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0; \tag{2}$$

(on dit dans ce cas que la relation (2) est une *relation de liaison*). L'équivalence avec la définition précédente est facile. Supposons que le vecteur $\vec{v}_i$ soit combinaison linéaire des autres, par exemple que $\vec{v}_i = \beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \beta_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \cdots + \beta_n\vec{v}_n$, alors on a

$$\beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\vec{v}_{i-1} + (-1)\vec{v}_i + \beta_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \cdots + \beta_n\vec{v}_n = 0,$$

où les coefficients de la combinaison linéaire du premier membre ne sont pas tous nuls, puisque $-1 \neq 0$. Inversement, supposons qu'on ait

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0$$

et que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne soient pas tous nuls, par exemple que $\alpha_j \neq 0$. On peut dans la relation de liaison isoler le terme contenant $\vec{v}_j$ dans le premier membre :

$$\alpha_j\vec{v}_j = -\alpha_1\vec{v}_1 - \cdots - \alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1} - \alpha_{i+1}\vec{v}_{i+1} - \cdots - \alpha_n\vec{v}_n.$$

On peut diviser par α_j, puisque $\alpha_j \neq 0$, et on obtient

$$\vec{v}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_j}\vec{v}_{i-1} - -\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j}\vec{v}_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\vec{v}_n.$$

Autrement dit, $\vec{v}_j$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n$.

On en déduit que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont *linéairement indépendants* si la relation

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0$$

n'est possible qu'avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Il revient au même de dire que la relation $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

5. *Si trois vecteurs forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, ils sont indépendants.* En effet, supposons que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Supposons de plus que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$. On a aussi $0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = 0$. Or, par définition des bases, le vecteur 0 ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ que d'une seule façon. On a donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. On a montré que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on a donc montré que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont indépendants.

Le premier résultat important de ce § est la réciproque de l'énoncé précédent. Il ne fait pas intervenir les déterminants.

6. Théorème. *Si trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ sont indépendants, ils forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.*

Démonstration. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs indépendants dans $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Nous devons montrer que

a) Tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

b) L'écriture d'un vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est unique.

Le fait que l'écriture d'un vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ soit unique, si elle existe, résulte de l'indépendance linéaire de ces vecteurs. Refaisons le raisonnement qui a été fait pour la dimension 2 au n° **??**. Si on a à la fois $\vec{x} = \mathrm{X}\vec{u} + \mathrm{Y}\vec{v} + \mathrm{Z}\vec{w}$ et $\vec{x} = \mathrm{X}_1\vec{u} + \mathrm{Y}_1\vec{v} + \mathrm{Z}_1\vec{w}$, on a $(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X})\vec{u} + (\mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y})\vec{v} + (\mathrm{Z}_1 - \mathrm{Z})\vec{w} = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{X}_1 - \mathrm{X} = \mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y} = \mathrm{Z}_1 - \mathrm{Z} = 0$, puisque les vecteurs sont indépendants, et $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}$, $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}$.

Il reste donc à prouver b). Introduisons une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont représentés dans cette base par les matrices

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w \\ w' \\ w'' \end{pmatrix},$$

ce que nous devons montrer, c'est que pour toute matrice-colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il existe des réels X, Y, Z tels que

$$\mathrm{X}\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} + \mathrm{Y}\begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix} + \mathrm{Z}\begin{pmatrix} w \\ w' \\ w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ou, ce qui revient au même, que le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} = x \\ u'\mathrm{X} + v'\mathrm{Y} + w'\mathrm{Z} = y \\ u''\mathrm{X} + v''\mathrm{Y} + w''\mathrm{Z} = z \end{cases}$$

où les inconnues sont X, Y, Z, possède une solution quels que soient les seconds membres x, y, z.

C'est ce que nous allons faire, mais d'une façon détournée.

Il est inoffensif, puisqu'on ne remplace à aucun moment la base $\mathcal{B}$ par une autre, d'identifier les vecteurs de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et les matrices-colonnes qui les représentent dans la base $\mathcal{B}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est $\neq 0$. On a donc $u = 0$ ou $u' = 0$ ou $u'' = 0$. *Supposons que la première coordonnée, u, soit* $\neq 0$. Si ce n'est pas le cas, on peut s'y ramener en changeant l'ordre des vecteurs de base. Si par exemple $u = 0$ et $u' \neq 0$, on écrira la base dans l'ordre $\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}$. On pourra ensuite renommer ces vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Considérons alors les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \vec{v} - \frac{v}{u}\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ p' \\ p'' \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \vec{w} - \frac{w}{u}\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ q' \\ q'' \end{pmatrix}.$$

La valeur exacte des coordonnées de $\vec{p}$ et $\vec{q}$ importe peu. Seul compte le fait que la première coordonnée est égale à 0.

Le vecteur $\vec{p}$ est $\neq 0$ (s'il était nul, $\vec{v}$ serait multiple de $\vec{u}$, ce qui est contraire à l'hypothèse). On a donc $p' = 0$ ou $p'' = 0$. *Supposons que la coordonnée p' soit $\neq 0$.* Si ce n'est pas le cas, on s'y ramène en échangeant les deux derniers vecteurs de la base.

Considérons maintenant les trois vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ p' \\ p'' \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \vec{q} - \frac{q'}{p'}\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r'' \end{pmatrix}.$$

On a $r'' \neq 0$, car sinon on aurait $\vec{r} = 0$, d'où $\vec{q} - \frac{q'}{p'}\vec{p} = 0$, soit $\vec{w} - \frac{w}{u}\vec{u} = \frac{q'}{p'}\left(\vec{v} - \frac{v}{u}\vec{u}\right)$ et $\vec{w}$ serait combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, contrairement à l'hypothèse.

Montrons que tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{p}$ et $\vec{r}$. Il revient au même de montrer que le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} u\mathrm{X} & = x \\ u'\mathrm{X} + p'\mathrm{Y} & = y \\ u''\mathrm{X} + p''\mathrm{Y} + r''\mathrm{Z} & = z \end{cases}$$

a une solution quels que soient x, y et z, ce qui est bien le cas, car on peut tirer X de la première équation (puisque $u \neq 0$), puis ensuite Y de la seconde équation (puisque $p' \neq 0$) et enfin Z de la troisième équation (parce que $r'' \neq 0$).

Comme $\vec{p}$ et $\vec{r}$ sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, il résulte de ce qui précède que tout vecteur de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est combinaison linéaire de ces trois vecteurs. □

7. *Remarque.* Il est essentiel que les vecteurs dans l'énoncé du théorème 6 soient au nombres de trois. Deux vecteurs indépendants dans $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ ne forment pas une base. Quatre vecteurs non plus.

Le lecteur est invité à le prouver dans les exercices 12 et 13.

8. Nous allons maintenant montrer que, comme en dimension 2, les deux propriétés, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont indépendants et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ sont équivalentes à une troisième, qui est que le déterminant de ces vecteurs dans une base donnée (quelconque) est non nul. Mais avant cela, nous allons faire une étude systématique des propriétés du déterminant.

9. Fonctions linéaires. Soit f une fonction définie sur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, à valeurs réelles. On dit que f est *linéaire* si

$$f(\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \cdots + \alpha_n f(\vec{u}_n)$$

quels que soient les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et les vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Pour que f soit linéaire, il faut et il suffit qu'on ait

$$f(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2)$$

quels que soient les scalaires α_1, α_2 et les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (c'est immédiat), ou encore qu'on ait

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$
$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le réel α.

Exemples. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Soit f la fonction qui à un vecteur $\vec{u}$ associe sa première coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est linéaire.

Le point (i) de la définition du produit scalaire dit que si $\vec{a}$ est un vecteur fixé, alors la fonction $\vec{u} \mapsto \vec{u}.\vec{a}$ est linéaire.

Les fonctions $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|$ et $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|^2$ ne sont pas linéaires.

Exercice. Vérifier ce qui précède.

10. Théorème. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Les fonctions linéaires $\vec{u} \mapsto f(\vec{u})$ définies sur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ sont celles qui s'expriment à partir des coordonnées u, v, w de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme*

$$f(\vec{u}) = au + bv + cw.$$

Démonstration. En effet, si f est linéaire, on a

$$f(\vec{u}) = uf(\vec{\imath}) + vf(\vec{\jmath}) + wf(\vec{k}).$$

Inversement, si on a $f(\vec{u}) = au + bv + cw$ pour tout $\vec{u}$, on a

$$f(\vec{u}+\vec{u}') = a(u+u')+b(v+v')+c(w+w') = au+bv+cw+au'+bv'+cw' = f(\vec{u})+f(\vec{u}')$$

et de même

$$f(\alpha\vec{u}) = a(\alpha u) + b(\alpha v) + c(\alpha w) = \alpha(au + bv + cw) = \alpha f(\vec{u}). \qquad \square$$

11. *Remarque.* On dit le plus souvent *forme linéaire* que fonction linéaire, en faisant ainsi référence plus à la forme $ax + by + cz$ de la fonction plus qu'à ses propriétés.

12. Propriétés du déterminant. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Alors :

(a) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est linéaire par rapport à chacune des variables, ce qui signifie que les trois fonctions $\vec{u} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\vec{v} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\vec{w} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont linéaires.

(b) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est changé en son opposé si on échange deux des vecteurs.

(c) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) = 1$.

(d) On a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
– si deux des vecteurs sont égaux ;
– si deux des vecteurs sont colinéaires ;
– si les trois vecteurs sont liés.

De plus, la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est inchangée si on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des deux autres

Démonstration. Notons comme d'habitude u, u', u'' les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, v, v', v'' celles de $\vec{v}$ et w, w', w'' celles de $\vec{w}$.

(a) On tire de la définition du déterminant la relation

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w,$$

où A, B, C ne dépendent que de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ($\mathrm{A} = v'w'' - v''w'$, $\mathrm{B} = v''w - vw''$, $\mathrm{C} = vw' - v'w$). Ceci montre que considéré comme fonction de $\vec{u}$ seulement, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est linéaire.
On montre de la même façon que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est linéaire par rapport à $\vec{v}$ et par rapport à $\vec{w}$.

(b) Cette propriété se vérifie sur la définition.

(c) Idem.

(d) 1) Montrons que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$. En effet, d'après la propriété (b), on a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ et un réel égal) son opposé est nul. On raisonne de la même façon si ce sont le deuxième vecteur et le troisième, ou le premier et le troisième, qui sont égaux.

2) Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = k \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ (linéarité par rapport à la deuxième variable), d'où $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ (propriété précédente). Même chose dans les autres cas.

3) Si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) + b \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v})$(linéarité par rapport à la troisième variable), d'où $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ (propriété 1)).

4) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v})$ (linéarité par rapport à la troisième variable), et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v}) = 0$ d'après 3). □

13. Théorème. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont indépendants.*

(ii) *Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.*

(iii) *Le déterminant des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\neq 0$.*

Démonstration. On a montré au n° 5 que (ii) implique (i) et au n° 6 que (i) implique (ii). D'autre part, on a vu au n° 12 que si trois vecteurs sont liés leur déterminant est nul. On en déduit en prenant la contraposée que si trois vecteurs ont leur déterminant non nul, ils sont indépendants, autrement dit que (iii) implique (i). Pour démontrer l'équivalence des trois propriétés, il ne reste donc plus qu'à prouver que (i) implique (iii).

Soient donc trois vecteurs indépendants $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Nous allons montrer que leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ n'est pas nul.

Reprenons la démonstration du théorème 6. Chacune des suites de trois vecteurs ci-dessous

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$$
$$\vec{u}, \vec{p}, \vec{w}$$
$$\vec{u}, \vec{p}, \vec{q}$$
$$\vec{u}, \vec{p}, \vec{r}$$

hormis la première, s'obtient à partir de la précédente en ajoutant à l'un des vecteurs un multiple d'un autre vecteur. À chaque étape, le déterminant reste donc inchangé. Autrement dit, on a

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{p}, \vec{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{p}, \vec{q}) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{p}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} u & 0 & 0 \\ u' & p' & 0 \\ u'' & p'' & r'' \end{vmatrix} = up'r'' \neq 0. \quad \square\end{aligned}$$

14. Théoreme. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} = 0 \\ u'\mathrm{X} + v'\mathrm{Y} + c'\mathrm{Z} = 0 \\ u''\mathrm{X} + v''\mathrm{Y} + c''\mathrm{Z} = 0 \end{cases}$$

n'a que la solution nulle $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$.

(ii) *Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} = x \\ u'\mathrm{X} + v'\mathrm{Y} + w'\mathrm{Z} = y \\ u''\mathrm{X} + v''\mathrm{Y} + w''\mathrm{Z} = z \end{cases}$$

possède une solution unique quelles que soient les valeurs des seconds membres x, y, z.

(iii) $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \neq 0.$

Le déterminant $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant du système linéaire. Il ne dépend que des premiers membres des équations du système.

Cet énoncé est une simple traduction de celui du théorème précédent. Voir si nécessaire le n° 15 où la même traduction a été faite en dimension 2.

15. Définition. Système d'équations linéaires homogène. On dit qu'un système d'équations linéaires où les seconds membres sont nuls est un système linéaire *homogène.*

Dans une équation telle que $ax+by+cz+d=0$ ou $ax+by+cz=d$, il y a des termes de degré 1 par rapport aux variables x, y, z et des termes de degré zéro (la constante d). Dans l'équation $ax+by+cz=0$, tous les termes sont du même degré, d'où l'emploi du mot *homogène.*

16. Systèmes de Cramer, formules de Cramer. On appelle *système de Cramer* un système de n équations linéaires à n inconnues ($n=2$ ou 3) dont le déterminant est non nul.

On vient de voir que pour $n=3$, un système de Cramer possède une solution et une seule. Par exemple, un système de Cramer homogène n'a que la solution nulle.

Les solutions d'un système de Cramer sont données par des formules. Les voici pour le système

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

La solution est

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

(formules de Cramer). Le dénominateur de chaque fraction est le déterminant du système. Le numérateur pour la première inconnue est le déterminant qu'on obtient en remplaçant la première colonne par la colonne des seconds membres. *Mutatis mutandis* pour la deuxième et la troisième inconnue.

Ces formules se démontrent ainsi. En se plaçant dans $\mathbb{R}^3$ et en considérant les colonnes

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix},\quad \mathrm{D}=\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix},$$

on réécrit le système sous la forme équivalente

$$x\mathrm{A}+y\mathrm{B}+z\mathrm{C}=\mathrm{D}.$$

Supposons que (x, y, z) soit effectivement une solution. On alors

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{D}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) &= \det(x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \\ &= x \det(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) + y \det(\mathrm{B}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) + z \det(\mathrm{C}, \mathrm{B}, \mathrm{C})\end{aligned}$$

Or $\det(\mathrm{B}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = 0$, puisque deux des vecteurs-colonnes qui figurent dans le déterminant s-ont égaux. De même $\det(\mathrm{C}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = 0$. On a donc

$$x = \frac{\det(\mathrm{D}, \mathrm{B}, \mathrm{C})}{\det(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})}.$$

On raisonne de la même façon pour y et z.

Exercice. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. On pose $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{v} = \vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{w} = \vec{k} + \vec{\imath}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Soit $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées x, y, z dans $\mathcal{B}$. Quelles sont ses coordonnées X, Y, Z dans $\mathcal{B}'$?

17. *Remarque.* Les formules ci-dessus ne sont pas dues à Cramer (1704-1752), mais à Leibniz (1646-1716). Ce que Cramer a fait, c'est de d'énoncer les formules analogues pour les systèmes de n équations linéaires à n inconnues, pour $n \geqslant 4$. Il y est parvenu en 1750, alors que Leibniz avait cherché ces formules toute sa vie.

La difficulté n'est pas d'imaginer que les solutions s'obtiennent comme quotient de deux déterminants, mais plutôt de donner la définition du déterminant pour $n \geqslant 4$. On se doute même que le déterminant est une somme de termes qui s'obtiennent en mettant un signe $\pm$ devant le produit de coefficients pris un dans chaque colonne de façon qu'on ne prenne pas deux facteurs dans la même ligne. La difficulté est de savoir quel signe on met devant quel coefficient. À noter que dans un déterminant à n lignes et n colonnes il y a $n!$ termes. Donc 24 pour $n = 4$.

18. Remarque importante. Dans la pratique, on montre souvent que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants en montrant que :

– $\vec{u} \neq 0$;

– $\vec{v}$ n'est pas multiple scalaire de $\vec{u}$.

De même on peut montrer que trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont indépendants en montrant que :

– $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants ;

– $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

À ces résultats correspondent des critères utilisant les déterminants :

– *si on suppose que $\vec{u}$ est différent de zéro,* alors $\vec{v}$ est multiple scalaire de $\vec{u}$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (dimension 2).

– *si on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants,* alors $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ (dimension 3).

Sans l'hypothèse supplémentaire, ces résultats sont faux puisqu'en dimension 2 on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = 0$ sans qu'il soit besoin que $\vec{u}$ soit multiple de 0 et qu'en dimension 3 on a $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés, sans qu'il soit besoin que $\vec{w}$ soit combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démontrons le critère concernant la dimension 3 (celui qui concerne la dimension 2 fait l'objet du corollaire **??**). Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, il existe trois réels α, β, γ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$. Si on avait $\gamma = 0$, les vecteurs $\vec{u}$

et $\vec{v}$ seraient liés, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $\gamma \neq 0$, ce qui permet de tirer de la relation de liaison une expression de $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{w} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{v}$).

§ 2. Application à quelques problèmes de géométrie analytique plane

19. La notion de déterminant a été introduite pour résoudre des problèmes concernant des vecteurs de la géométrie, particulièrement le problème de pouvoir écrire un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs donnés. Mais l'écriture d'un vecteur dans une base n'est que l'une des interprétations possibles des systèmes d'équations linéaires.

Dans les applications, même dans les applications géométriques, les inconnues x, y, z n'ont pas à être les coordonnées d'un vecteur, et elles peuvent être tout autre chose. Voici un exemple.

20. Condition pour que trois points du plan soient alignés. Supposons les points du plan (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) soient alignés. Cela implique qu'il existe une équation de droite, du type $ax + by + c = 0$, satisfaite par les coordonnées de ces trois points, donc qu'il existe trois réels a, b, c non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + c &= 0 \\ ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

ou encore que le système d'équations linéaires homogènes

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x_0 a + y_0 b + c = 0 \\ x_1 a + y_1 b + c = 0 \\ x_2 a + y_2 b + c = 0 \end{cases}$$

où les inconnues sont a, b, c possède une solution autre que la solution nulle. On doit avoir par conséquent

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Inversement, si cette condition est satisfaite, il existe trois réels A, B, C non tous les trois nuls formant une solution du système (S). Mais l'équation $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ est-elle l'équation d'une droite ? Pour cela, il faudrait que A ou B soit $\neq 0$. La réponse est oui, parce que comme on le voit immédiatement, aucune solution (A, B, C) du système (S) ne peut être telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0, \mathrm{C} \neq 0$.

21. Équation de la droite passant par deux points. La droite passant par les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est l'ensemble des points (x, y) alignés avec ces deux points. Elle a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice. Vérifier qu'on retrouve bien (aux changements de notation près) l'équation obtenue au n° **??**, ainsi que par les autres moyens de déterminer l'équation d'une droite passant par deux points étudiés dans le secondaire.

22. Équation de la droite passant par un point et de vecteur directeur donné. Soit

$$ax + by + c = 0$$

l'équation (on sait qu'il y a plusieurs équations, mais elles sont toutes proportionnelles, c'est pour ça qu'on dit l'équation) de la droite D passant par $M_0 = (x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (u, v)$.

On sait que $ax_0 + by_0 + c = 0$ et que $au + bv = 0$. Un vecteur directeur de D est en effet forcément de la forme $(u, v) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$ où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont de points de D et du fait que $ax_2+by_2+c = 0$ et $ax_1+by_1+c = 0$ on déduit, en faisant la différence, que $au + bv = 0$.

Si (x, y) appartient à la droite D, le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x_0a + y_0b + c &= 0 \\ ua + vb &= 0 \\ xa + yb + c &= 0 \end{cases}$$

où les inconnues sont a, b, c possède une solution autre que la solution nulle. On doit avoir par conséquent

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ u & v & 0 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier soigneusement la réciproque : si le déterminant est nul, le point (x, y) appartient à D.

23. Condition pour que trois droites du plan soient concourantes ou parallèles. Si les trois droites d'équations

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \\ a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

ont un point en commun, le système linéaire homogène

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z = 0 \\ a''X + b''Y + c''Z = 0 \end{cases}$$

possède une solution non triviale, à savoir la solution $X = x, Y = y, Z = 1$, où x et y sont les coordonnées du point d'intersection, et on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Malheureusement, la réciproque est fausse. La nullité du déterminant, nécessaire pour que les trois droites soient concourantes, n'est pas suffisante. En effet, si les droites sont parallèles, elles possèdent un vecteur directeur $\vec{u} = (u, v)$ commun, et le système

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z = 0 \\ a''X + b''Y + c''Z = 0 \end{cases}$$

possède dans ce cas aussi une solution non triviale, à savoir la solution $X = u, Y = v, Z = 0$ (un vecteur directeur est non nul par définiton).

Nous venons de montrer que si les trois droites d'équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ sont concourantes *ou* parallèles, alors le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ est nul. Démontrons la réciproque.

Si ce déterminant est nul, il existe X, Y, Z non tous nuls tels que

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z = 0 \\ a''X + b''Y + c''Z = 0 \end{cases}$$

De deux chose l'une :

– ou bien $Z \neq 0$, et on vérifie immédiatement en divisant les trois équations par Z que le point de coordonnées $x = X/Z$, $y = Y/Z$ appartient aux trois droites, qui sont donc concourantes.

– ou bien $Z = 0$, et le vecteur (X, Y) qui est non nul, est un vecteur directeur commun aux trois droites, et ces droites sont parallèles.

Exercices

On se place systématiquement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 7 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

par la règle de Sarrus et en faisant les développements par rapports aux trois lignes et aux trois colonnes.

Exercice 2. Calculer

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ p & b & 1 \\ q & r & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ p & 0 & -r \\ q & r & 0 \end{vmatrix}.$$

Il n'est pas interdit d'utiliser les propriétés des déterminants démontrées dans le cours, ni d'être astucieux. Quand le déterminant est nul, trouver une relation entre les colonnes.

Exercice 3. Les vecteurs $(1, -1, 2)$, $(2, 1, 3)$ et $(1, -4, 3)$ sont-ils indépendants ? Si la réponse est non, trouver une relation non triviale entre ces vecteurs.

Exercice 4. Les vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(2, 1, 0)$ ne sont pas colinéaires. Trouver un vecteur de la base canonique tel $(1, -1, 2)$, $(2, 1, 0)$ et ce vecteur forment une base. [On peut s'arranger pour que ça ne marche que pour un vecteur ou pour deux, ou pour les trois.]

Exercice 5. Vérifier que

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. Pour quelle valeur de m le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

est-il un système de Cramer. Que se passe-t-il pour les autres valeurs de m : zéro solution, une infinité de solutions ? Pour ces valeurs-là, une solution unique est impossible, pourquoi ?

Exercice 7. Montrer que le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x + my + 2z = 0 \end{cases}$$

est un système de Cramer sauf pour trois valeurs de m exactement. Résoudre le système pour ces valeurs de m.

Exercice 8. Donner un exemple où $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ et où $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire des deux autres vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercices plus théoriques

Exercice 9. *a*) Soient A et B deux points distincts du plan. Montrer qu'un point M appartient à la droite AB si et seulement si $\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$.

b) Soient A, B, C trois points non alignés dans l'espace. Montrer qu'un point M appartient au plan ABC si et seulement si $\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 10. Montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sont liés ssi les 3 déterminants 2 x 2 qu'ils forment sont nuls (il suffit d'ailleurs que deux le soient). Il y a plusieurs méthodes, à la main, avec des u/v, en considérant l'application $\vec{x} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$, en cherchant le cas échéant à compléter en une base avec un des vecteurs de la base canonique, etc.

Exercice 11. On fixe une base de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$. Tous les déterminants sont relatifs à cette base. Soient A, B, C trois points non alignés. Montrer que $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \det(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \det(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})$.

Exercice 12. Montrer que deux vecteurs ne peuvent pas former une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. *Indication.* On travaille dans $\mathbb{R}^3$. On suppose les deux vecteurs indépendants. On suppose $\vec{u} = (u, u', u'')$ avec $u \neq 0$, $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$. Montrer que soit le vecteur $(0, 1, 0)$ soit le vecteur $(0, 0, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 13. Montrer que quatre vecteurs ne peuvent pas former une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. *Indication.* On travaille dans $\mathbb{R}^3$. On distingue les cas. Peut-on trouver parmi les vecteurs donnés trois vecteurs indépendants ? Si oui, ils forment une base, et on montre qu'en ajoutant le quatrième on n'a plus une base. Si la réponse est non, peut-on trouver parmi les vecteurs donnés deux vecteurs indépendants ? Si oui, on montre que les deux autres sont des combinaisons linéaires de ces deux-là, et on est ramené à l'exercice précédent.

Chapitre 5

Équations des droites et des plans

§ 1. Les deux modes de représentation d'une droite ou d'une courbe du plan

1. L'équation cartésienne d'une droite du plan. Fixons pour tout ce paragraphe un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, ce qui nous permettra pe,ser à un couple (x, y) comme

Il y a deux façons de représenter une droite de $\mathbb{R}^2$: soit par une représentation paramétrique comme

$$x = 3 + 2t, \quad y = 4 - t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

soit par ce qu'on appelle une équation cartésienne comme

$$x + 2y - 5 = 0.$$

Il s'agit de la même droite. Il y a encore une troisième façon de représenter la même droite, par l'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, on en parlera plus tard.

On dispose aussi de ces deux modes de représentation pour les courbes. Par exemple, le cercle de rayon R centré à l'origine peut être défini soit par la représentation paramétrique

$$x = \mathrm{R}\cos t, \quad y = \mathrm{R}\sin t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

soit par l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2.$$

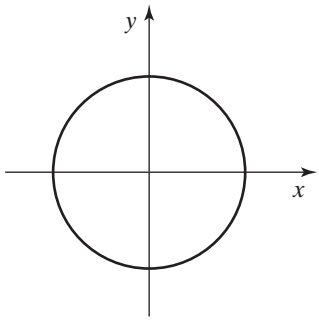

Fig. 1.

Voici un exemple plus compliqué : la courbe d'équations paramétriques

$$x = \frac{t}{1+t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^4} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

est aussi la courbe d'équation cartésienne

$$x^6 + x^2y^4 - x^2y = 0$$

Elle est représentée ci-dessous :

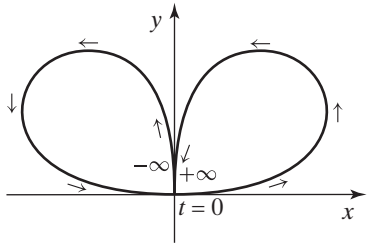

Fig. 2.

Ces deux modes de représentation :

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (t \in \mathrm{I})$$

où I est un intervalle et f et g des fonctions réelles définies sur I pour le premier,

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

pour le second, sont des cas particuliers des deux modes de définition d'un ensemble E (ici, un ensemble de points du plan) :

– ou bien on donne la liste des éléments de E,

– ou bien on donne une condition permettant dans un ensemble plus grand (le plan) de distinguer les éléments de E des autres : les éléments de E sont ceux qui vérifient la condition.

Dans le premier cas, on écrit

$$\mathrm{E} = \{(f(t), g(t)) \mid t \in \mathrm{I}\}$$

« ensemble des points $(f(t), g(t))$ où t décrit l'intervalle I ». Si on voit t comme le temps, on peut voir E comme la trajectoire d'un point mobile. La liste dont nous parlions est bien entendu une « liste généralisée ». Si I était un ensemble fini $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, le paramétrage définirait une suite finie de points, ce qu'on appelle une liste.

Dans le second cas, on écrit

$$\mathrm{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{F}(x, y) = 0\}$$

« ensemble des points (x, y) tels que $\mathrm{F}(x, y) = 0$ ». La barre verticale a donc la signification « où t décrit... » dans le premier, « tels que » dans le second.

2. Passage d'une représentation à l'autre : élimination et paramétrage

Et considérons la droite D d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a + tu \\ y = b + tv \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sont colinéaires, donc si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x-a & u \\ y-b & v \end{vmatrix} = 0.$$

soit, en développant le déterminant,

$$v(x-a) - u(y-b) = 0.$$

On peut être plus expéditif, et écrire que $\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v}$$

En toute rigueur cela n'a de sens que si u et v sont tous deux non nuls. C'est pourquoi on convient que si par exemple $u = 0$ (ce qui impose $v \neq 0$, puisque le vecteur (u, v) n'est pas nul), la relation est vraie si le numérateur correspondant à u est aussi égal à zéro, et ce quelle que soit la valeur de l'autre rapport.

On obtient alors par les deux méthodes la même équation, et notamment $x = a$ si $u = 0$ (dans ce cas $v \neq 0$), $y = b$ si $v = 0$ (et $u \neq 0$).

Conclusion. Toute droite possède une équation de la forme

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0,$$

où A et B ne sont pas tous les deux nuls.

3. Passage de l'équation cartésienne à la représentation paramétrique. Toute équation $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$ ($(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq (0, 0)$) définit une droite. Si $\mathrm{B} \neq 0$, la partie du plan définie par l'équation $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ est aussi définie par l'équation équivalente $y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$, soit une équation de la forme

$$y = \alpha x + \beta.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme d'une équation paramétrique en prenant x comme paramètre :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \alpha t + \beta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Si $B = 0$, alors $A \neq 0$ et l'équation donnée équivaut à $x = \frac{A}{C}$, soit à une équation de la forme

$$x = \gamma.$$

Si on veut vraiment une équation paramétrique, on peut prendre

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Dans les deux cas, il s'agit bien d'une droite.

4. Convention. *On rencontrera souvent dans ce chapitre des suites d'égalités de fractions telles que*

$$(*) \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}$$

Pour traiter d'un seul coup tous les cas particuliers, on convient :

1) que si l'un des dénominateurs est nul, le numérateur correspondant est nul ;

2) de retirer la fraction en question de la suite d'égalités.

Par exemple, si $b = 0$ et que a, c, d sont non nuls, les relations précédentes sont équivalentes à

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}, \quad b' = 0.$$

De même, si $b = 0$ et $a \neq 0$, la relation

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

équivaut à $b' = 0$.

Avec cette convention, écrire les relations $(*)$ revient strictement à écrire qu'il existe un scalaire k tel que $(a', b', c', d') = k(a, b, c, d)$

5. Unicité de l'équation cartésienne d'une droite du plan. Si on multiplie l'équation cartésienne

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$$

d'une droite D par une constante k non nulle, on obtient l'équation $k\mathrm{A}x + k\mathrm{B}y + k\mathrm{C} = 0$, qui est aussi une équation de D. Montrons que si D possède une autre équation de la même forme, disons $\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0$, alors c'est un multiple de (E).

Pour cela, on écrit que les points communs à D et à la droite D′ d'équation $\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0$ sont en fait tous les points de D. Ces points (ou plutôt leurs coordonnées) sont les solutions du système

$$\begin{cases} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0 \end{cases}$$

Supposons $A \neq 0$. Le système est équivalent au système

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (B' - \dfrac{A'}{A}B)y + (C' - \dfrac{A'}{A}C) = 0 \end{cases}$$

Si $B' - \frac{A'}{A}B \neq 0$, la seconde équation n'est satisfaite que par une valeur de y, et par suite le système n'a comme solution qu'un seul couple (x, y). Comme l'intersection de D et D′ comporte une infinité de points, on doit avoir $B' - \frac{A'}{A}B \neq 0$. Dans ce cas, si $C' - \frac{A'}{A}C \neq 0$, la seconde équation, qui est de la forme constante non nulle $= 0$, est impossible à satisfaire, et l'intersection de D et D′ ne contient aucun point. On a donc $C' - \frac{A'}{A}C = 0$. Par suite, on a

$$\frac{C'}{C} = \frac{B'}{B} = \frac{A'}{A}.$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. Si $A = 0$, alors $B \neq 0$, et on raisonne de façon similaire.

L'équation d'une droite du plan est donc *unique à une constante multiplicative près.* C'est pourquoi on se permet de parler de « l' » équation, avec un article défini.

Exercice. Donner une représentation paramétrique, puis cinq représentations paramétriques différentes de la droite d'équation $x + y = 2$.

6. Équation cartésienne d'un plan. Considérons dans E un plan P, de représentation paramétrique

$$M = A + s\vec{u} + t\vec{v} \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

ou, en coordonnées, dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

Soit M un point quelconque de E, de coordonnées x, y z. À quelle condition, nécessaire et suffisante, portant sur x, y, z, le point M appartient-il à P ?

Si M appartient à P, on a $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$ pour certaines valeurs de s et t. Les trois vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont donc liés, et par suite leur déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} x - a & u & v \\ y - b & u' & v' \\ z - c & u'' & v'' \end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi obtenu une condition *nécessaire* pour que M appartienne à P. Cette condition est-elle suffisante ? Supposons le déterminant nul. Le corollaire **??** du

chapitre 1 dit seulement que dans ce cas, les trois vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}, \vec{v}$ sont liés par une relation de la forme

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \beta\vec{u} + \gamma\vec{v} = 0$$

où l'un (au moins) des trois nombres α, β, γ est $\neq 0$. Mais il n'est pas possible qu'on ait $\alpha = 0$ dans cette relation, car alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires, contrairement à la définition des plans. On a donc $\alpha \neq 0$, et on peut tirer de la relation de liaison la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{u} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{v}$$

qui montre que M appartient au plan. La relation est donc suffisante. En développant le déterminant, on obtient l'équation du plan P :

$$(u'v'' - u''v')(x - a) - (uv'' - u''v)(y - b) + (uv' - u'v)(z - c) = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$$

et l'un au moins des coefficients A, B, C est non nul. En effet, si on avait $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$, cela signifierait que les trois déterminants $u'v'' - u''v'$, $uv'' - u''v$, $uv' - u'v$ sont nuls, et on tirerait de là, avec les précautions habituelles en cas de nullité,

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{u''}{v''}$$

ce qui n'est pas, puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont par hypothèse non colinéaires.

On peut aussi obtenir l'équation de P sans avoir recours au déterminant. La méthode est utile à connaître parce qu'elle a une signification et une portée plus générale. Nous la rencontrerons plusieurs fois dans ce cours, dans des situations diverses. Traitons un exemple numérique. Supposons que P soit défini par la représentation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Alors

$$\mathrm{M} = (x, y, z) \in \mathrm{P} \iff \text{Il existe } s \text{ et } t \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 - s + t \\ z = 2 + s + 4t \end{cases}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} s + 2t = x - 1 \\ -s + t = y - 2 \\ s + 4t = z - 2 \end{cases},$$

où s et t sont les inconnues, possède une solution

Résolvons le système (S) par la méthode du pivot, ou commençons tout au moins. On a

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} s+2t &= x-1 \\ 3t &= x+y-3 & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1) \\ 2t &= -x+z-1 & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s+2t &= x-1 \\ 3t &= x+y-3 \\ 0 &= -\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}y+z+1 & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\frac{2}{3}\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

Le point M étant donné, de deux choses l'une. Ou bien $-\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}y+z+1 \neq 0$ et le système est impossible : il ne possède pas de solutions s et t, puisque la troisième équation ne peut pas être vérifiée, et le point M n'appartient pas au plan P. Ou bien $-\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}y+z+1=0$, et le système possède une solution : la troisième équation est vérifiée par hypothèse ; la seconde est satisfaite par une valeur de t qu'on peut déterminer immédiatement à partir des coordonnées de M ; cette valeur de t étant calculée, la première équation est satisfaite pour une valeur de s qu'on peut calculer à partir de la valeur donnée à t et des coordonnées de M.

On a donc

$$\mathrm{M}=(x,y,z) \in \mathrm{P} \iff -\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}y+z+1=0.$$

La condition $-\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}y+z+1=0$, qu'on écrit plus commodément $8x+2y-3z-3=0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à P.

7. Théorème. Équation cartésienne d'un plan. Tout plan P possède une équation de la forme

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0,$$

où les réels A, B, C ne sont pas tous les trois nuls.

Démonstration. C'est un résumé de ce qui précède. □

8. Passage de l'équation cartésienne d'un plan à la représentation paramétrique. *Tout sous-ensemble* P *de* E *défini par une équation de la forme*

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0,$$

où les réels A, B, C *ne sont pas tous les trois nuls, est un plan.*

Montrons que P peut être défini par un point et deux vecteurs non colinéaires comme au n° 37. Supposons par exemple $\mathrm{C} \neq 0$ (si $\mathrm{A} \neq 0$ ou $\mathrm{B} \neq 0$ on raisonne de la même façon). Alors l'équation $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$ est équivalente à l'équation « résolue en z »

$$z=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}x-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}y-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$$

On peut transformer cette dernière équation en représentation paramétrique en introduisant deux paramètres s et t égaux à x et y respectivement. En effet, l'équation est satisfaite si et seulement si il existe des réels s et t tels que

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}s - \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}t - \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}} \end{cases}$$

On obtient donc la représentation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} \end{pmatrix}$$

Puisque les vecteurs $\big(1, 0, -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}})\big)$ et $\big(0, 1, -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\big)$ de $\mathbb{R}^3$ sont indépendants, il s'agit bien d'un plan.

9. Théorème. *Les deux équations*

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z + \mathrm{D}' = 0$$

*(*A, B, C *non tous nuls,* A′, B′, C′ *non tous nuls) représentent le même plan si et seulement si on a*

$$\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}.$$

Démonstration. Les relations $\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}$ signifient qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\mathrm{A}' = k\mathrm{A}, \mathrm{B}' = k\mathrm{B}, \mathrm{C}' = k\mathrm{C}, \mathrm{D}' = k\mathrm{D}$. Puisque A' ou B' ou C' est non nul, on a forcément $k \neq 0$. Par conséquent,

$$\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z + \mathrm{D}' = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0.$$

Inversement, supposons que cette équivalence soit réalisée. Soit P le plan représenté par ces équations. Supposons par exemple $\mathrm{A} \neq 0$. Alors le point de coordonnées (x, y, z) appartient à P si les deux équations

$$\begin{cases} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 & (\mathrm{L}_1) \\ \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z + \mathrm{D} = 0 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

Il appartient aussi à P si le système de deux équations

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 & (\mathrm{L}_1) \\ \big(\mathrm{B}' - \dfrac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\mathrm{B}\big)y + \big(\mathrm{C}' - \dfrac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\mathrm{C}\big)z + \big(\mathrm{D}' - \dfrac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\mathrm{D}\big) = 0 & \big(\mathrm{L}_2 - \dfrac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\big), \end{cases}$$

équivalent au précédent, est satisfait.

Il y a dans P un point de la forme $(x_1, 0, 0)$ (x_1 n'est pas difficile à calculer : $x_1 = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}$). Il y a aussi dans P un point de la forme $(x_2, 1, 0)$ et un point de la

forme $(x_3, 0, 1)$. En écrivant que ces points sont solutions du système (Σ) on obtient successivement

$$D' - \frac{A'}{A}D = 0, \quad B' - \frac{A'}{A}B = 0, \quad C' - \frac{A'}{A}C = 0,$$

d'où

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{D'}{D}. \quad \square$$

10. Droite dans l'espace. Passage de la représentation paramétrique aux équations cartésiennes. Considérons la droite D définie par le point a et le vecteur directeur $\vec{u}$. Dans un système de coordonnées.elle est définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a + tu \\ y = b + tv \\ z = c + tw \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

qui reviennent en fait à demander que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{u}$. La droite D est donc définie par les équations conditions

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}$$

(avec la convention habituelle).

Pour faciliter la discussion, supposons que u, v, w soient tous les trois non nuls. Les points de D satisfont les trois équations

$$\text{(I)} \qquad \frac{x-a}{u} - \frac{y-b}{v} = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{y-b}{u} - \frac{z-c}{w} = 0$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{x-a}{u} - \frac{z-c}{w} = 0$$

On obtient trois équations portant sur x, y, z. Mais ces équations ne sont pas indépendantes : la troisième est la somme des deux premières. Ce qui veut dire que (I) et (II) entraînent (III). La droite D peut donc être définie par deux équations seulement, et elle apparaît comme l'intersection de deux plans : les plans d'équations (I) et (II).

Notons que D est ainsi représentée comme l'intersection de deux plans. Le premier de ces plans est parallèle à Oz, c'est-à-dire « vertical » : l'équation ne contient pas la variable z ; si elle est vérifiée par un point (x_0, y_0, z_0), elle l'est automatiquement pour un point quelconque de la forme (x_0, y_0, z) quelle que soit la valeur de z. De même l'équation (II) ne contient pas la variable x, et le plan correspondant est parallèle à Ox, et l'équation (III) ne contient pas y, et le plan correspondant est parallèle à Oy.

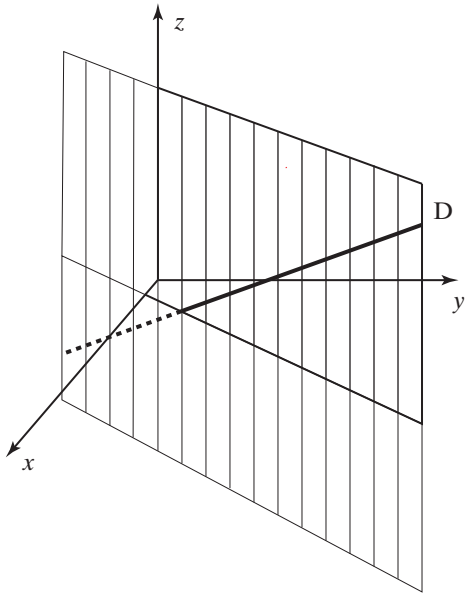

Fig. 3. Plan vertical passant par D

Il existe en fait une infinité de plans passant par D, et D peut être définie comme l'intersection de deux d'entre eux (voir n° 12 ci-dessous).

11. Droite dans l'espace. Passage des équations cartésienne à la représentation paramétrique. *Un système d'équations de la forme*

$$\begin{cases} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} & = 0 \\ \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z + \mathrm{D}' & = 0 \end{cases}$$

définit une droite sauf *si on a*

$$\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}}$$

(condition qui, on le verra plus loin, signifie que les plans sont parallèles ou confondus).

L'un des coefficients A, B, C n'est pas nul. Supposons que ce soit A (les autres cas se traitent de la même façon). En prenant A comme pivot, on voit que le système considéré est équivalent au système

$$\begin{cases} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} & = & 0 \\ \left(\mathrm{B}' - \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)y + \left(\mathrm{C}' - \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\mathrm{C}\right)z + \left(\mathrm{D}' - \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\mathrm{D}'\right) & = & 0 \end{cases}$$

L'un des deux coefficients $\left(B' - \frac{A'}{A}B\right)$ et $\left(C' - \frac{A'}{A}C\right)$ n'est pas nul, car sinon on aurait $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$ et les deux plans seraient parallèles. Supposons que ce soit le premier. Nous avons alors transformé le système de départ en un système de la forme

$$\begin{cases} Ax + By &= -Cz - D \\ \beta y &= -\gamma z - \delta \end{cases}$$

avec $A \neq 0$, $\beta \neq 0$. Pour chaque valeur de la variable z (appelée paramètre, ou inconnue non principale), ce système possède une solution unique en (x, y) qui s'exprime en fonction de z. Il vaut mieux achever le calcul sur un exemple :

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 1 &= 0 \\ x + 2y + 3z - 3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 5z + 1 &= 0 \\ \frac{3}{2}y + \frac{11}{2}z - \frac{7}{2} &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y &= 5z - 1 \\ \frac{3}{2}y &= -\frac{11}{2}z + \frac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\frac{13}{3}z - \frac{5}{3} \\ y &= -\frac{11}{3}z + \frac{7}{3} \end{cases}$$

La représentation paramétrique cherchée est donc

$$\begin{cases} x &= -\frac{13}{3}t - \frac{5}{3} \\ y &= -\frac{11}{3}t + \frac{7}{3} \\ z &= t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

12. Plans passant par une droite. Toutes les façons de définir une droite par deux équations. Considérons une droite D, définie par deux équations

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{cases}$$

Prises séparément, ces équations sont les équations de deux plans contenant D (ou passant par D, cela revient au même). De plus, deux au moins des rapports

$$\frac{A'}{A}, \quad \frac{B'}{B}, \quad \frac{C'}{C}$$

sont différents, sans quoi l'intersection des deux plans (ensemble des points vérifiant les deux équations) ne serait pas une droite.

Si α et β ne sont pas tous les deux nuls, l'équation

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

est l'équation d'un plan passant par D.

Cette équation s'écrit aussi

$$(\alpha A + \beta A')x + (\alpha B + \beta B')y + (\alpha C + \beta C')x + (\alpha D + \beta D') = 0.$$

Pour voir qu'il s'agit de l'équation d'un plan, il suffit de vérifier que l'un des trois coefficients $\alpha A + \beta A'$, $\alpha B + \beta B'$, $\alpha C + \beta C'$ est $\neq 0$. C'est bien le cas, parce

que s'ils étaient tous nuls, on aurait $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = -\frac{\alpha}{\beta}$, ce qui est exclu par hypothèse.

L'équation d'un plan quelconque passant par D *est de la forme*

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

où α et β ne sont pas tous les deux nuls.

Posons $p(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$, $q(x, y, z) = A'x + B'y + C'z + D'$. Soit P un plan contenant D. Ce plan contient aussi un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ n'appartenant pas à D. Considérons alors l'équation

$$q(x_0, y_0, z_0)p(x, y, z) - p(x_0, y_0, z_0)q(x, y, z) = 0.$$

C'est l'équation d'un plan parce que les constantes $p(x_0, y_0, z_0)$ et $q(x_0, y_0, z_0)$ ne sont pas nulles toutes les deux (si elles l'étaient, le point M_0 serait sur D. Ce plan contient D, ainsi que le point M_0 (vérifier en substituant dans l'équation les coordonnées de M_0 à x, y, z). Il coïncide donc avec P, ce qui montre que l'équation de P est de la forme voulue.

Ce qui précède montre que l'ensemble des plans passant D est l'ensemble des plans d'équation

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \tag{1}$$

($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$). Cet ensemble est appelé le *faisceau des plans passant par* D. Les plans du faisceau dépendent d'un seul paramètre et non de deux, puisque l'équation ci-dessus peut aussi s'écrire

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \tag{2}$$

si on pose $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$. On admet la valeur $\lambda = \infty$ pour tenir compte du cas $\alpha = 0$, et on convient que dans ce cas l'équation (2) doit être remplacée par $A'x + B'y + C'z + D' = 0$. On peut se représenter le faisceau comme un plan pivotant autour de D

On dit souvent que (1) ou (2) est l'*équation générale des plans passant par* D.

Deux plans distincts du faisceau (correspondants à deux valeurs distinctes de λ) on pour intersection D. On obtient donc tous les systèmes d'équations linéaires définissant D en prenant les équations de deux plans distincts du faisceau.

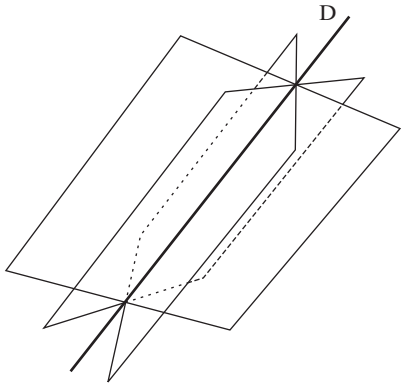

Fig. 4. Faisceau des plans passant par D

§ 2. Parallélisme et intersection

13. Définition. Droites parallèles. Plans parallèles. On montre très facilement que l'image d'une droite par une translation est une droite, et que la translation réalise une bijection de la droite sur son image. Idem pour un plan.

En géométrie plane ou en géométrie dans l'espace, on dit que *deux droites* D *et* D′ *sont parallèles* s'il existe une translation qui applique l'une sur l'autre. Notation : $\mathrm{D} /\!/ \mathrm{D}'$.

Par exemple, on a toujours D // D (une droite est parallèle à elle-même, ou comme on dit : deux droites confondues sont parallèles). Si D // D′, alors D′ // D. Si D // D′ et D′ // D″, alors D // D″. Ces propriétés reflètent le fait que : 1) l'identité est une translation (translation de vecteur $\vec{0}$) ; 2) la réciproque d'une translation est une translation (de vecteur $-\vec{u}$ si la translation donnée est de vecteur $-\vec{u}$; 3) la composée de deux translations est une translation (de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ si les translations données sont de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

En géométrie dans l'espace, on dit que *deux plans sont parallèles* s'il existe une translation qui applique l'un sur l'autre. Notation : $\mathrm{P} /\!/ \mathrm{P}'$.

Tout ce qui vient d'être dit à propos des droites parallèles s'applique aussi aux plans.

14. Caractérisation des droites et plans parallèles à partir des équations. Considérons les droites D et D′, d'équations respectives

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0.$$

et supposons que la translation de vecteur (u, v) applique D sur D′. L'image d'un point quelconque (x, y) de D est sur D′, ce qui signifie que pour tout point

de (x, y) de D on a

$$A'(x+u)+B'(y+v)+C'=0,$$

soit

$$A'x+B'y+C'+A'u+B'v=0,$$

La droite D est donc contenue dans la droite d'équation $A'x+B'y+(C'+A'u+B'v)=0$. Elle est donc confondue avec cette droite, et on a par conséquent

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'+A'u+B'v}{C}.$$

Retenons que

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}.$$

Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, soit k la valeur commune des deux rapports (forcément non nulle). Puisque $A'=kA$ et $B'=kB$, on peut diviser par k l'équation de D′, qui s'écrit alors

$$Ax+By+C''=0 \quad \text{avec } C''=C'/k$$

Dans ces conditions, il n'est pas difficile de trouver une translation qui applique D sur D′ : il suffit de prendre comme vecteur de la translation un vecteur (u, v) tel que $Au+Bv+C''=C$, par exemple $(\frac{C''-C}{A}, 0)$ si $A \neq 0$. On a ainsi montré :

Pour que les droites d'équations $Ax+By+C=0$ *et* $A'x+B'y+C'=0$ *soient parallèles, il faut et il suffit que*

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}.$$

De plus :

On obtient toutes les droites parallèles à la droite d'équation $Ax+By+C=0$ *en changeant le terme constant, c'est-à-dire en prenant pour équation* $Ax+By+\lambda=0$ *et en faisant varier* λ *de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

On a des énoncés identiques pour le cas des plans :

Pour que les plans d'équations $Ax+By+Cz+D=0$ *et* $A'x+B'y+C'z+D'=0$ *soient parallèles, il faut et il suffit que*

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}.$$

On obtient toutes les plans parallèles au plan d'équation $Ax+By+Cz+D=0$ *en changeant le terme constant, c'est-à-dire en prenant pour équation* $Ax+By+Cz+\lambda=0$ *et en faisant varier* λ *de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

Par contre, il n'y pas de caractérisation aussi simple du parallélisme pour les droites de l'espace.

15. Équation de l'ensemble des vecteurs portés par une droite ou un plan. Soit S un plan ou une droite. Rappelons qu'un vecteur est $\vec{u}$ dit *porté par* S s'il existe deux points A et B de S tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Si $\vec{u}$ est porté par S, deux points C et D tels que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ sont soit tous les deux dans S, soit tous les deux hors de S (on ne démontre pas tout...). Dans ce dernier cas, il existe une translation qui envoie C et D dans S, sur deux points C′ et D′ tels que (forcément) $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$. C'est pourquoi quand un vecteur est porté par S, on dit aussi qu'il est *parallèle à* S.

Les vecteurs (X, Y, Z) *portés par le plan* P *d'équation* $Ax + By + Cz + D = 0$ *sont ceux qui vérifient l'équation* $AX + BY + CZ = 0$.

Cette équation est appelée l'équation homogène associée à l'équation $Ax + BY + Cz + D = 0$ *(on a retiré la constante, terme de degré zéro, et tous les termes sont de degré* 1*).*

Soit $\vec{u} = (X, Y, Z)$. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ où A et B sont des points de P, on a $X = x_B - x_A$, $Y = y_B - y_A$, $Z = z_B - z_A$. Des relations

$$Ax_A + By_A + Cz_A + D = 0$$
$$Ax_B + By_B + Cz_B + D = 0$$

qui expriment le fait que A et B appartiennent à P, on tire en soustrayant

$$A(x_B - x_A) + B(y_B - y_A) + C(z_B - z_A) + D,$$

soit $AX + BY + CZ + D = 0$. Inversement, si cette relation est satisfaite, et que A un point de B, on obtient, en additionnant les relations

$$Ax_A + By_A + Cz_A + D = 0$$
$$AX + BY + CZ + D = 0$$

la relation

$$A(x_A + X) + B(y_A + Y) + C(z_A + X) + D,$$

qui exprime le fait que $B = A + \vec{u}$ appartient à P. Il en résulte que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est porté par P.

On montre de la même façon que les vecteurs portés par une droite satisfont les équations homogènes associées aux équations de la droite (obtenues en supprimant la constante) et qu'en géométrie plane les vecteurs portés par une droite satisfont l'équation homogène associée à l'équation de la droite.

16. Plan vectoriel. Droite vectorielle. On donne à l'ensemble des vecteurs portés par (ou parallèles à) un plan P le nom de *plan vectoriel directeur de* P ou *plan vectoriel associé à* P. On le note $\overrightarrow{\mathrm{P}}$.

D'après ce qui précède, si P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ a pour équation l'équation homogène associée $a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} = 0$.

On donne de même à l'ensemble des vecteurs portés par une droite D le nom de *droite vectorielle directrice* de la droite en question. Notation : $\overrightarrow{\mathrm{D}}$. Si D a pour équations

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{D}}$ a pour équations les équations homogènes associées

$$a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} = 0$$
$$a'\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + c'\mathrm{Z} = 0$$

Deux plans sont parallèles s'ils on même plan vectoriel directeur. Deux droites sont parallèles si elles ont même droite vectorielle directrice.

17. Droites parallèles à un plan. On dit qu'une droite D est *parallèle à un plan* P s'il existe une translation qui applique D dans P. En considérant l'image de D par la translation, on voit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite contenue dans ce plan.

Attention ! Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas en général parallèles entre elles (voir figure 5).

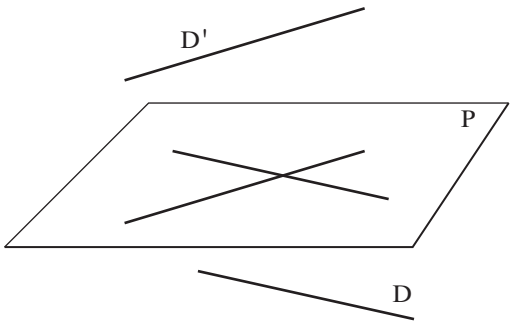

Fig. 5. Les droites D et D′ sont toutes deux parallèles à P, mais elles ne sont pas parallèles

18. Positions relatives de deux droites (géométrie plane). Deux droites du plan se trouvent nécessairement l'une par rapport à l'autre dans l'une des positions suivantes :

(a) D et D′ sont confondues ;
(b) D et D′ sont parallèles et distinctes ;
(c) D et D′ sont concourantes ;

Ces faits sont bien connus et se démontrent en étudiant le système de deux équations à deux inconnues qui fournit les points d'intersection, ou par des raisonnements analogues à ceux qui suivent.

19. Positions relatives d'une droite et d'un plan. Une droite et un plan se trouvent nécessairement l'une par rapport à l'autre dans l'une des positions suivantes :

(a) la droite est contenue dans le plan ;
(b) la droite est parallèles au plan et ne le rencontre pas ;
(c) la droite n'est pas parallèle au plan ; elle a avec le plan un point d'intersection.

Le cas (a) est un cas particulier de parallélisme.

Supposons la droite D définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, ou ce qui revient au même par la représentation paramétrique

$$x = a + tu, \quad y = b + tv, \quad z = c + tw \quad (t \in \mathbb{R}),$$

et supposons le plan P défini par l'équation

$$\mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} + \mathrm{D} = 0.$$

Les points d'intersection de D et de P (ou plus précisément leurs paramètres sur D) s'obtiennent en résolvant l'équation

$$\mathrm{A}(a + tu) + \mathrm{B}(b + tv) + \mathrm{C}(c + tw) + \mathrm{D} = 0.$$

C'est une équation du premier degré en t, qui s'écrit

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D} + (\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w)t = 0.$$

La classification des positions relatives résulte d'une discussion :

(1) Si $\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w = 0$, c'est-à-dire si le vecteur directeur de D est parallèle à P (voir n° 15), deux cas se présentent :
   (i) ou bien $\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D} = 0$, ce qui signifie que le point A appartient à P. Dans ce cas, le premier membre de l'équation en t est identiquement nul, et tous les points de D appartiennent à P (cas (a)) ;
   (ii) ou bien $\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D} \neq 0$. Dans ce cas, le premier membre de l'équation en t ne s'annule jamais, puisqu'il est constant, et aucun point de D n'appartient à P (cas (b)).

(2) Si $\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w \neq 0$, auquel cas D n'est pas parallèle à P, l'équation en t a une solution unique, et D et P ont un point d'intersection unique (cas (c)).

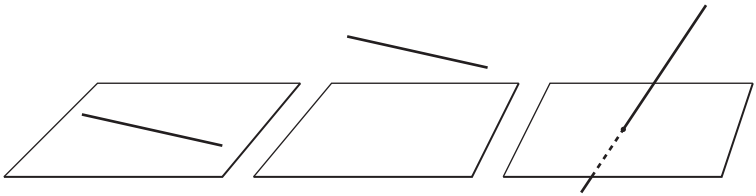

Fig. 6. Positions relatives d'une droite et d'un plan

20. Positions relatives de deux droites (dans l'espace). Deux droites se trouvent nécessairement l'une par rapport à l'autre dans l'une des positions suivantes :

(a) elles sont parallèles et confondues ;
(b) elles sont parallèles et distinctes ;
(c) elles sont concourantes ;
(d) D et D′ sont en position générale.

Explication. Les situations (a), (b), (c) sont celles où les droites sont coplanaires. Si deux droites ne sont pas coplanaires, on dit qu'elles sont *en position générale* (parce que c'est la position la plus courante, la position de deux droites prises au hasard).

Supposons les deux droites D et D′ définies respectivement par les repères $(\mathrm{A}, \vec{u})$ et $(\mathrm{A}', \vec{u}')$. La classification des positions relatives de D et D′ résulte d'une discussion :

(1) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, les deux droites sont parallèles. Deux cas se présentent :

   (i) les deux droites ont un point commun. Soit B ce point. On peut prendre $(\mathrm{B}, \vec{u})$ et $(\mathrm{B}, \vec{u}')$ comme repères de D et D′. Comme $\vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$, on peut même prendre $(\mathrm{B}, \vec{u})$ comme repère de D. Les deux droites sont confondues (cas (a)).

   (ii) les deux droites n'ont aucun point commun. Il s'agit donc de deux droites différentes (cas (b)).

(2) Si les vecteurs, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont indépendants, on distingue encore deux cas, de la même façon :

   (i) les deux droites ont un point commun. Soit B ce point. On peut prendre $(\mathrm{B}, \vec{u})$ et $(\mathrm{B}, \vec{u}')$ comme repères de D et D′. Comme $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont indépendants, le repère $(\mathrm{B}, \vec{u}, \vec{u}')$ définit un plan, qui contient D et D′ (cas (c)).

   Si D et D′ sont dans un même plan P, on est nécessairement dans l'une des situations (a), (b) ou (c), tout simplement parce que la

géométrie plane s'applique dans P, et que ce sont les trois positions relatives possibles pour deux droites du plan (voir n° 18).

(ii) les deux droites n'ont pas de point commun. Puisqu'elles ne sont pas parallèles et qu'elles ne se rencontrent pas, elles ne peuvent pas être contenues dans un même plan, d'après ce qui précède (cas (*d*)).

Pour mieux comprendre la situation, introduisons le plan P défini par $(A, \vec{u}, \vec{u}')$. La droite D est contenue dans ce plan, la droite D′ est parallèle à P, puisque son vecteur directeur est $\vec{u}'$, et n'a aucun point commun avec P (sinon elle en aurait un commun avec D, puisque une droite parallèle à un plan qui a un point en commun avec lui est contenue dans ce plan (n° 19) et que deux droites d'un même plan non parallèles ont forcément un point commun (n° 18). C'est la situation déjà illustrée fig. 5, en supposant de plus D contenue dans P. Voir aussi fig. 7

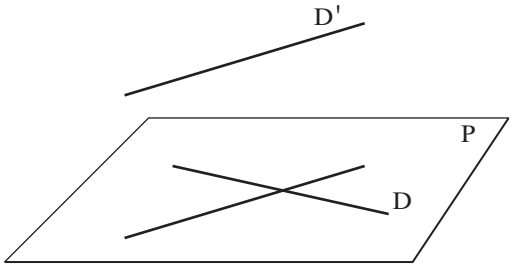

Fig. 7. Droites en position générale

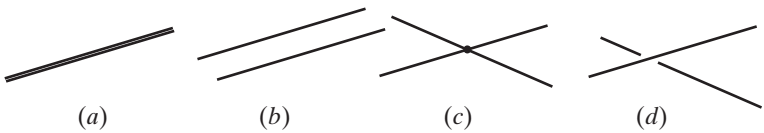

Fig. 8. Positions relatives de deux droites

21. Positions relatives de deux plans. On a vu au n° 11 que si deux (au moins) des trois rapports $\frac{A'}{A}$, $\frac{B'}{B}$, $\frac{C'}{C}$ sont différents, l'intersection des deux plans est une droite, et au n° 14 que si au contraire $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$ les deux plans sont parallèles.

Ce dernier cas se subdivise en deux : si $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{D'}{D}$, les deux plans sont confondus, si $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} \neq \frac{D'}{D}$, les deux plans n'ont aucun point en commun.

En résumé :

Deux plans se trouvent nécessairement l'une par rapport à l'autre dans l'une des positions suivantes :

(a) ils sont parallèles et confondus ;
(b) ils sont parallèles et distincts ;
(c) ils se coupent suivant une droite.

§ 3. Diverses façons de déterminer l'équation d'une droite du plan et autres problèmes

22. Commençons par le problème le plus courant : l'équation d'une droite passant par deux points. Celui qui provoque habituellement les exclamations des collègues (et les miennes) : « Il a son bac, et il ne sait pas déterminer l'équation de la droite passant par deux points ! » C'est pourtant très simple si on pense à déterminer d'abord la *pente* de la droite (les puristes feront remarquer que la pente n'a de sens que dans un repère orthonormé : dans un repère quelconque, le coefficient a dans l'équation $y = ax + b$ porte le nom de *coefficient directeur*).

23. Équation de la droite de pente donnée passant par un point donné. La droite de pente m passant par le point (a, b) a pour équation

$$\boxed{y - b = m(x - a).}$$

Vérification : il s'agit bien de l'équation d'une droite de pente m (développer), et quand $x = a$, on a $y - b = 0$, soit $y = b$; cette droite passe donc par le point (a, b).

24. Équation de la droite passant par deux points donnés. On recherche l'équation de la droite passant par deux points distincts (a, b) et (a', b'). On se ramène au problème précédent en observant que cette droite doit avoir pour pente $\frac{b'-b}{a'-a}$. On sait en effet depuis la 4e ou la 3e que la pente d'une droite est égale à

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}},$$

le Δ etant pris entre deux points quelconques de la droite. L'équation de la droite est donc

$$\boxed{y - b = \frac{b' - b}{a' - a}(x - a).}$$

Ce qui précède n'est valable, le lecteur l'aura remarqué, que si $a \neq a'$. Si au contraire $a = a'$, la droite donnée est la verticale (ou la parallèle à $\mathrm{O}y$) passant par (a, b), et elle a pour équation

$$\boxed{x = a.}$$

L'emploi des vecteurs et du déterminant fournit d'autres façons de poser le problème, et de le résoudre.

25. Droite définie par un point et un vecteur directeur. On cherche l'équation de la droite D passant par le point $\mathrm{A} = (a, b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (u, v)$. Rappelons au passage qu'une droite de pente m admet pour vecteur directeur le vecteur $(1, m)$.

Le point $\mathrm{M} = (x, y)$ est situé sur D si le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est colinéaire à $\vec{u}$ ($\overrightarrow{\mathrm{AM}} // \vec{u}$), ou encore si

$$\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Si u et v ne sont pas nuls, cela revient à demander que

$$\boxed{\frac{x - a}{u} = \frac{y - b}{v}.}$$

L'équivalence sera valable dans tous les cas si nous adoptons la convention habituelle sur les dénominateurs. Si on ne fait pas cette convention, il suffit de quelques secondes pour se convaincre que l'équation de D est $x = a$ si $u = 0$, $y = b$ si $v = 0$,

On peut éviter ces considérations sur les dénominateurs en utilisant le déterminant pour écrire que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} // \vec{u}$. On obtient comme équation de la droite

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - a & u \\ y - b & v \end{vmatrix} = 0.}$$

26. Équation de la droite passant par deux points donnés (autre méthode). On cherche l'équation de la droite passant par les points (distincts) $\mathrm{A} = (a, b)$, $\mathrm{A}' = (a', b')$. On se ramène au problème précédent en observant que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = (a' - a, b' - b)$ est un vecteur directeur de cette droite. On obtient pour équation

$$\boxed{\frac{x - a}{a' - a} = \frac{y - b}{b' - b}}$$

(équation qui, suivant la convention sur les dénominateurs, se ramène à $x = a$ si $a = a'$, à $y = b$ si $b = b'$), ou, ce qui revient bien entendu au même,

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-a & a'-a \\ y-b & b'-b \end{vmatrix} = 0.}$$

ou, sous forme développée (à ne pas retenir) :

$$(b'-b)x-(a'-a)y = (b'-b)a-(a'-a)b.$$

27. Équation de la droite passant par deux points donnés (autre méthode). Dire que $\mathrm{M} = (x, y)$ appartient à la droite (AA'), c'est dire que les points A, A′ et M sont alignés, ou encore qu'il existe une droite passant par ces trois points. Cela revient à dire, en notant $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ l'équation de cette droite, qu'il existe des réels α, β, γ tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha a + \beta b + \gamma = 0 \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons considérer ces équations comme un système d'équations linéaires où les inconnues sont α, β et γ et dire α, β, γ vérifient $(*)$, c'est exactement dire qu'ils forment une solution de ce système. On sait que ce système possède une solution différente de la solution nulle si et seulement si son déterminant est nulle. De plus, une solution non nulle ne peut pas être de la forme $(0, 0, \gamma)$, car alors on a $\gamma \neq 0$ et $\gamma = 0$, ce qui est contradictoire. Par suite, la nullité du déterminant équivaut à l'existence d'une solution (α, β, γ) de (S) elle que α ou $\beta \neq 0$. Une condition nécessaire pour que A, A′ et M soient alignés est donc

$$\boxed{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \end{vmatrix} = 0.}$$

En développant, on retrouve évidemment l'équation donnée plus haut.

28. Condition pour que trois points du plan soient alignés. Le raisonnement qu'on vient de faire montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points $\mathrm{A} = (a, b)$, $\mathrm{A}' = (a', b')$, $\mathrm{A}'' = (a'', b'')$ soient alignés est

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \\ a'' & b'' & 1 \end{vmatrix} = 0.}$$

29. Condition pour que trois droites du plan soient concourantes ou parallèles. Les trois droites D, D′, D″, d'équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ sont concourantes si et seulement si le système

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

possède une solution. Introduisons le système légèrement modifié (S′), où les équations ont trois inconnues, mais qui a l'avantage d'être un système homogène :

$$\text{(S}'\text{)} \qquad \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$$

Il revient bien entendu au même de demander que le système (S′) ait une solution de la forme $(x, y, 1)$. Ou même une solution (x, y, z) avec $z \neq 0$, car dans ce cas $(x/z, y/z, 1)$ est aussi solution.

Nous savons que le système (S′) possède une solution avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ si et seulement si on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

La nullité de ce déterminant est donc une condition *nécessaire* pour que les droites D, D′ et D″ soient concourantes. Cette condition est-elle *suffisante* ? Supposons le déterminant égal à zéro. Le système (S′) possède donc au moins une solution non nulle (x, y, z). S'il existe une solution avec $z \neq 0$, les trois droites sont concourantes (au point $(x/z, y/z)$), comme on vient de le voir. Si au contraire on a $z = 0$ pour toute solution (x, y, z) de (S′), cela implique, compte tenu de la nullité du déterminant, qu'il existe une solution avec $(x, y) \neq (0, 0)$. On a alors

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a'x + b'y &= 0 \\ a''x + b''y &= 0 \end{aligned}$$

ce qui signifie que le vecteur (x, y) est un vecteur directeur de chacune des droites D, D′, D″. Ces droites sont donc parallèles.

On a ainsi montré :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ *soient concourantes ou parallèles est que*

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.}$$

§ 4. Forme métrique de l'équation d'une droite

On se place dans un repère orthonormé du plan.

30. Le vecteur normal à une droite. Soit la droite D, d'équation

$$ax + by + c = 0.$$

Le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ est orthogonal à tous les vecteurs portés par la droite : en effet, si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points de D, on a $ax_0 + by_0 + c = 0$ et $ax_1 + by_1 + c = 0$, d'où $a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$ en soustrayant membre à membre ces deux relations :

$$\begin{array}{r} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_0 + by_0 + c = 0 \\ \hline a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0 \end{array}$$

Un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs portés par D est dit *normal à* D, et $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à D. Tous les vecteurs non nuls colinéaires à un vecteur normal à D sont aussi normaux à D, et réciproquement : tout vecteur normal à D est colinéaire à $\vec{n}$.

Exercice. Démontrer cette réciproque.

Bien qu'il y ait une infinité de vecteurs normaux à D, on dit souvent *le* vecteur normal à D, au singulier, en sous-entendant qu'il est défini « à un multiple scalaire près ». Il existe aussi deux vecteurs normaux à D et unitaires, qui sont $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ et $-\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

En remplaçant c par $-k$, on peut écrire l'équation de D sous la forme

$$\vec{n} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{OM}} = k$$

En faisant varier k, on obtient toutes les droites parallèles à D.

Si le point M_0 appartient à la droite $\vec{n} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{OM}} = l$, on a $l = \vec{n} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{OM}_0}$, ce qui fait que la droite passant par M_0 et orthogonale à $\vec{n}$ (ou parallèle à D) a pour équation

$$\boxed{\vec{n} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{n} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{OM}_0}, \quad \text{ou} \quad \vec{n} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} = 0.}$$

Deux droites sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

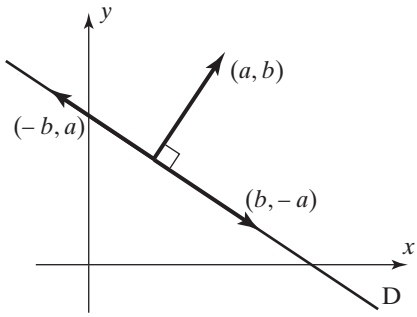

Fig. 9. Vecteur normal à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$: (a, b). Vecteurs directeurs de D : les solutions de $a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} = 0$, notamment $(b, -a)$ et $(-b, a)$.

31. Distance de l'origine à une droite. Équation normale d'une droite. On conserve le notations précédentes. La droite issue de O et de vecteur directeur $\vec{n}$ coupe D en un point H. Le point H est de tous les points de D celui qui est le plus proche de O. En effet, pour tout point M de D, on a $\overrightarrow{\mathrm{HM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$, donc $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HM}^2$ (théorème de Pythagore) et $\mathrm{OM}^2 > \mathrm{OH}^2$ si m est distincte de H.

La distance de l'origine à D est donc celle de l'origine à H. Pour la calculer, on observe que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \lambda\vec{n}$ pour un certain λ. En écrivant que H vérifie l'équation de D, on obtient donc

$$\lambda\vec{n}\,.\,\vec{n} = k,$$

d'où $\lambda = \frac{k}{\|\vec{n}\|^2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{k}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$. Finalement, $\mathrm{dist}(\mathrm{O}, \mathrm{D}) = \mathrm{OH} = \|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \frac{|k|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{|k|}{\|\vec{n}\|}$. En revenant à l'équation cartésienne, on obtient

$$\mathrm{dist}(\mathrm{O}, \mathrm{D}) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Refaisons le même calcul en coordonnées, pour comparer. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ est colinéaire à $\vec{n} = (a, b)$, les coordonnées de H sont de la forme $x_{\mathrm{H}} = \lambda a$, $y_{\mathrm{H}} = \lambda b$. En écrivant que H est un point de D, c'est à dire en écrivant que $ax_{\mathrm{H}} + by_{\mathrm{H}} + c = 0$, on obtient $\lambda(a^2 + b^2) = -c$, d'où $\lambda = -\frac{c}{a^2+b^2}$ et

$$x_{\mathrm{H}} = -\frac{ca}{a^2 + b^2}, \quad y_{\mathrm{H}} = -\frac{cb}{a^2 + b^2}$$

et $\mathrm{dist}(\mathrm{O}, \mathrm{D}) = \mathrm{OH} = \sqrt{x_{\mathrm{H}}^2 + y_{\mathrm{H}}^2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, comme attendu.

§ 5. Forme métrique de l'équation d'un plan. Projection orthogonale

On se place dans un repère orthonormé fixé.

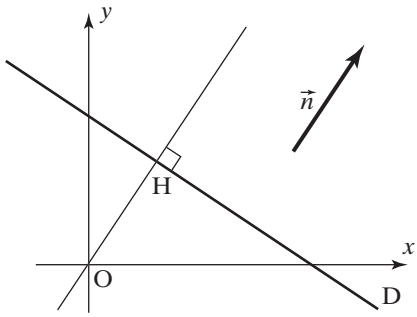

Fig. 10.

32. Définition. Vecteurs orthogonaux à un plan. On dit qu'un vecteur est *orthogonal* (ou *normal*) à un plan P s'il est orthogonal à tout vecteur porté par P.

Si le plan P a comme équation

$$ax + by + cz + d = 0,$$

alors le vecteur de coordonnées (a, b, c) est orthogonal à P. En effet, pour tout vecteur porté par P, de coordonnées (X, Y, Z), on a $aX + bY + cZ = 0$.

Tout vecteur colinéaire à (a, b, c) est orthogonal à P (c'est évident), et inversement, tout vecteur orthogonal à P est colinéaire à (a, b, c). En effet, dire que le vecteur (a', b', c') est orthogonal à P, c'est dire que tout vecteur orthogonal à P vérifie l'équation $a'X + b'Y + c'Z = 0$, autrement dit que $aX + bY + cZ = 0$ entraîne $a'X + b'Y + c'Z = 0$, ou encore que le plan $a'X + b'Y + c'Z = 0$ est contenu dans le plan $aX + bY + cZ = 0$. Dans ce cas, ces deux plans sont confondus, et on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Autrement dit, deux vecteur normaux à P sont colinéaires. On dit d'une façon plus frappante que le vecteur normal est unique à (multiplication par) un scalaire près.

On observe immédiatement que deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

33. Forme métrique de l'équation d'un plan Le plan P d'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

admet $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal. Son équation s'écrit donc

$$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = k$$

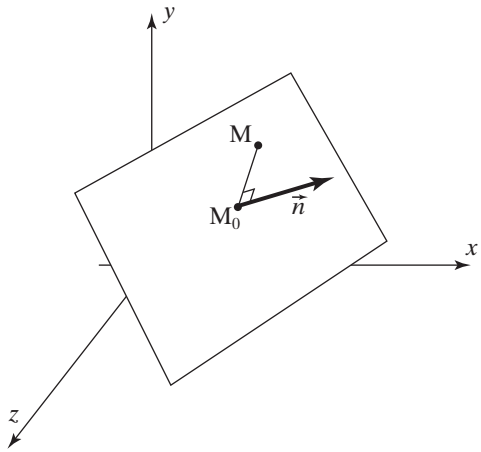

Fig. 11.

(en posant $k = -d$). On peut l'écrire plus joliment. Si M_0 est un point quelconque du plan, on a aussi $\vec{n}.\overrightarrow{OM_0} = k$. Pour que M appartienne à P, il est donc nécessaire et suffisant qu'on ait $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = \vec{n}.\overrightarrow{OM_0}$, soit $\vec{n}.(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = 0$, soit encore

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

34. Projection orthogonale d'un point sur un plan Théorème. Soit P un plan. Étant donné un point M de l'espace, il existe un point M′ de P et un seul tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal à P.

Ce point est appelé le projeté orthogonal de M sur P. Il réalise le minimum de la distance de M à P.

Soit $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à P, et soit A un point de P. D'après le n° précédent, un point m appartient à P si et seulement si on a $\vec{n}.\overrightarrow{Am} = 0$. Soit M′ un point. On at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \perp P &\iff \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire à } \vec{n} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 32) \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{MM'} = t\vec{n} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, M' = M + t\vec{n} \end{aligned}$$

Les points M′ tels que $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal à P forment donc une droite. D'après le n° précédent, un point de cette droite, de la forme $M' = M + t\vec{n}$ est dans P si et seulement si on a

$$\vec{n}.\overrightarrow{AM'} = 0,$$

c'est-à-dire si on a

$$\vec{n}.(\overrightarrow{\mathrm{AM}} + t\vec{n}) = \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AM}} + t\,\|\vec{n}\|^2 = 0,$$

ou finalement

$$t = -\frac{\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Ce qui montre à la fois l'existence et l'unicité du point M′ répondant aux conditions de l'énoncé.

Si N est un autre point du plan, on a

$$\begin{array}{rcll} \|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|^2 & = & \|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{M'N}}\|^2 & \text{puisque } \overrightarrow{\mathrm{M'N}} \in \overrightarrow{\mathrm{P}} \text{ et donc } \overrightarrow{\mathrm{MM'}} \perp \overrightarrow{\mathrm{M'N}} \\ & > & \|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\|^2 & \text{si } \mathrm{N} \neq \mathrm{M'} \end{array}$$

On pose $d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\|$. C'est la plus petite distance de M à un point du plan. On dit aussi que c'est la distance de M au plan.

35. Calcul de la distance d'un point à un plan Conservons les mêmes notations. On a

$$d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\| = \|t\vec{n}\| = |t|\,\|\vec{n}\| = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AM}}|}{\|\vec{n}\|^2}\,\|\vec{n}\|,$$

soit

$$d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AM}}|}{\|\vec{n}\|}.$$

En coordonnées, dans un repère orthonormé, si le plan P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, on peut prendre $\vec{n} = (a, b, c)$. Si le point A a pour coordonnées (α, β, γ), on a $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$ et

$$\begin{array}{rcl} \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AM}} & = & a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) \\ & = & ax + by + cz - (a\alpha + b\beta + c\gamma) \\ & = & ax + by + cz + d. \end{array}$$

D'où

$$\boxed{d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.} \tag{3}$$

36. Équations de la projection orthogonale sur P Toujours avec les mêmes notations, la projection orthogonale est l'application qui à M associe son projeté M′.

On a $\mathrm{M'} = \mathrm{M} + t\vec{n}$, avec la valeur de t calculée plus haut, soit

$$\mathrm{M'} = \mathrm{M} - \frac{\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}.$$

En coordonnées, on obtient

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{ax + by + cz + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(expression matricielle [1] de la projection orthogonale sur P). Retenons que cette expression est de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathrm{B},$$

où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

§ 6. Orthogonalité. Plans perpendiculaires

Les résultats de ce § sont admis sans démonstration. Le lecteur pourra les démontrer lui-même à titre d'exercice.

37. Droites orthogonales. On dit que deux droites D et D′ sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Ou, ce qui revient au même, si tout vecteur porté par l'une des droites est orthogonal à tout vecteur porté par l'autre.

Dans l'espace, deux droites orthogonales ne se rencontrent pas nécessairement. (Penser à une droite orthogonale à un plan, qui est orthogonale à toutes les droites de ce plan, voir n° suivant.)

38. Droites orthogonales à un plan. On dit qu'une droite D est orthogonale à un plan P, ou que D et P sont orthogonaux si tout vecteur porté par D est orthogonal à tout vecteur porté par P.

Pour cela, il faut et il suffit qu'un vecteur directeur de D soit orthogonal à deux vecteurs portés par P et indépendants. Voici quelques autres résultats :

- Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites du plan, et réciproquement. Pour la réciproque il suffit en fait que la droite en question soit orthogonale à deux droites du plan non parallèles.
- Une droite est orthogonale à un plan si son vecteur directeur est colinéaire au vecteur normal du plan.
- Une droite et un plan orthogonaux se rencontrent.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles

1. Les matrices sont introduites au chapitre 5.

Remarque. On peut parler de droite ou de plan orthogonal à une direction de droite ou de plan, puisque l'orthogonalité ne dépend que des vecteurs portés par D ou P.

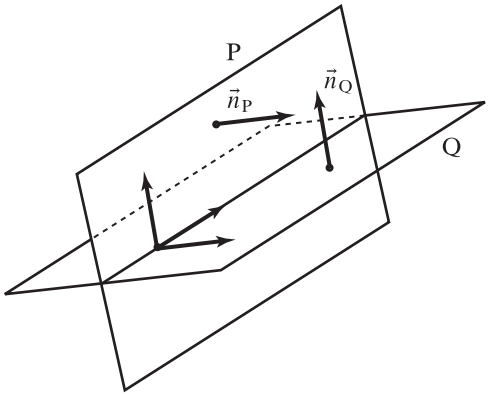

Fig. 12. Plans perpendiculaires et leurs vecteurs normaux

39. Plans perpendiculaires. Il n'existe pas de plans P et Q orthogonaux, car on réserve ce terme au cas où tout vecteur porté par P est orthogonal à tout vecteur porté par Q, ce qui est impossible.

On dit que deux plans sont *perpendiculaires* s'il existe un vecteur porté par P et un vecteur porté par Q qui sont orthogonaux.

- Deux plans sont perpendiculaires si le vecteur normal de P (qu'on peut noter $\vec{n}_{\mathrm{P}}$) est parallèle à Q, ou si $\vec{n}_{\mathrm{Q}}$ est parallèle à P, ou si les vecteurs normaux $\vec{n}_{\mathrm{P}}$ et $\vec{n}_{\mathrm{Q}}$ sont orthogonaux.
- Deux plans perpendiculaires se rencontrent suivant une droite, et la situation est celle de la figure 12.

Exercices

Exercice 1. Donner l'équation de la droite (Δ), parallèle à $(\mathrm{D}) : 2x - 3y + 5 = 0$ et passant par le point M_0 dans chacun des cas suivants :
- M_0 a pour coordonnées $(9/2, -1/6)$
- M_0 a pour coordonnées $(1, -1)$
- M_0 a pour coordonnées $(0, 0)$

Exercice 2. Donner l'équation de la droite (Δ), perpendiculaire à $(\mathrm{D}) : x + 2y + 5 = 0$ et passant par le point M_0 de coordonnées $(6, -4)$.

Exercice 3. Déterminer pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les droites $(\mathrm{D}_m) : mx + 3y - 1 = 0$ et $(\Delta_m) : x + (m + 2)y - m = 0$ sont concourantes, parallèles ou confondues.

Exercice 4. Déterminer quelles sont les coordonées du (ou des) point(s) d'intersection de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec les axes de coordonnées.

Il est assez facile de trouver les points d'intersection avec les axes de coordonnées quand l'équation est de la forme $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. C'est la manière la plus rapide de tracer une droite.

Exercice 5. On considère deux droites (D) : $ax + by + c = 0$ et (D′) : $a'x + b'y + c' = 0$, que l'on suppose concourantes. Montrer que l'équation générale d'une droite passant par ce point d'intersection est

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \text{ pour } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Exercice 6. Donnez un couple d'équations pour la droite passant par $A = (1, 5, 7)$ et $B = (2, 1, 3)$.

Exercice 7. Donnez un couple d'équations pour la droite passant par $A = (1, 5, 7)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Déterminez l'intersection des plans $P_1 : x - 2y + z + 3 = 0$, $P_2 : 2x + y - z - 2 = 0$ et $P_1 : 4x + y - z + 4 = 0$.

Exercice 9. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 5, 7)$ et perpendiculaire à $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 1, 1)$ et parallèle à $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ et $C = (1, 0, 1)$.

Exercice 12. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ et perpendiculaire au plan $x + y + z + 1 = 0$.

Exercice 13. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 2, 1)$ et perpendiculaire aux plans $x + 2y + z + 3 = 0$ et $2x + y - z + 1 = 0$.

Exercice 14. Donnez un couple d'équations cartésiennes puis paramétriques de la droite passant par $A = (1, 1, 1)$ et par $B = (1, 0, 2)$.

Exercice 15. Intersection de la droite d'équation $\begin{cases} 3x + y + 2z + 1 = 0 \\ x + 3y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$ avec chacun des plans de coordonnées.

Exercice 16. Soit la droite d'équation $\begin{cases} 3x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ et le plan défini par $x - y - z + 1 = 0$; montrez qu'ils sont perpendiculaires.

Exercice 17. Donnez un point et un vecteur directeur de la droite d'équation $\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Exercice 18. Montrez que les droites définies par $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ ont un point commun. En déduire qu'elles sont contenues dans un même plan ; en déduire une équation de ce plan.

Exercice 19. Donnez une paramétrisation de la droite d'équation $4x-3y+1=0$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20. Donnez une paramétrisation du plan d'équation $4x-3y+1=0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 21. Donnez une paramétrisation du plan P d'équation $3x+y+2z+1=0$.

Exercice 22. Donnez l'équation de la médiatrice d'un segment [A, B], où A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B).

Exercice 23. Montrez que si un quadrilatère possède quatre côtés de même longueur, alors ses diagonales sont perpendiculaires. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 24. Donnez les équations cartésiennes des deux bissectrices associées aux deux droites concourantes suivantes : $(\Delta_1) : 3x+4y+3=0$ et $(\Delta_2) : 12x-5y+4=0$.

Exercice 25. Donnez une équation cartésienne du plan P perpendiculaire au plan P′ d'équation $2x-3y+4z-1=0$ et contenant la droite (Δ) d'intersection de P′ avec le plan d'équation $y=0$.

Exercice 26. Donnez l'équation générale des plans contenant la droite d'équation $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}$

Parmi ces plans, y a-t-il un plan vertical ? un plan parallèle à Ox ? un plan parallèle à Oy ? un plan parallèle à xOy ? un plan orthogonal eu vecteur $(1,1,1)$?

Exercice 27. A quelle(s) condition(s) l'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est-elle celle d'un cercle ? Donnez le cas échéant le centre et le rayon de ce cercle.

Exercice 28. Soit ABCD un rectangle non plat, H et K les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur la diagonale AC. Calculez la distance HK en fonction des longueurs respectives a et b des cotés AB et BC. (*Indication.* On calculera $\overrightarrow{\mathrm{HK}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$).

Exercice 29. Soit ABCD un parallélogramme non plat du plan tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$. On considère encore un point P tel que la parallèle à (AB) menée par P coupe (AD) en E et (BC) en F ; tel que la parallèle à (AD) menée par P coupe (AB) en G et (CD) en H. Montrez que les trois droites (EH), (FG) et (AC) sont concourantes ou parallèles.

Indication. On se placera dans le repère cartésien $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$; on notera (λ, μ) les coordonnées de P dans ce repère et l'on calculera les équations des droites considérées.

Exercice 30. Dans un triangle ABC rectangle en A, on note A′ le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de A sur (BC), I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC). Montrez que (IJ) est orthogonal à (AA′).

Exercice 31. Prouver les assertions de la légende de la fig. 7, p. 39.

Exercice 32. Soit $\vec{v}$ un vecteur (du plan ou de l'espace, au choix) orthogonal à tous les autres. Montrez que v est le vecteur nul.

Exercice 33. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et soit $\vec{v}$ une autre vecteur du plan orthogonal à tous les vecteurs orthogonaux à u. Montrez que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Qu'en est-il si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de l'espace ?

Exercice 34. Donnez un repère orthonormé du plan d'équation $2x + y + z = 1$.

Exercice 35. Donnez un repère orthonormé de l'espace dont le premier vecteur est orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 36. On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire usuel. Vérifier que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il en est de même de $\vec{u}$ et $-\vec{v}$. Faire une figure.

Exercice 37. Soient D et Δ deux droites du plan. On note $p : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{D}$ la projection orthogonale sur D et $q : \mathbb{R}^2 \to \Delta$ la projection orthogonale sur Δ. Montrer que si D et Δ sont orthogonales, alors l'application $q \circ p$ envoie tout le plan sur un point. Démontrer la réciproque. Faire une figure.