Licence Chimie L2
Parcours Chimie
module OT3

"Outils mathématiques pour le chimiste"

Travaux Dirigés

Année universitaire 2014-2015

Table des matières

1 Algèbre linéaire **2**
1.1 Préambule 2
1.2 Symétries et rotations dans $\mathbb{R}^3$ 3
1.3 Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation 5

2 Analyse **7**
2.1 Préambule 7
2.2 Intégrales multiples, changement de variable 7
2.3 Analyse de Fourier 8

Formulaire mathématique **12**
Relations de trigonométrie 12
Dérivée et primitive des fonctions usuelles 13
Règles de différentiation et d'intégration 14

1 Algèbre linéaire

1.1 Préambule

-A- Géométrie euclidienne, vecteurs, droites, plans

Exercice A1 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ caractérisé par les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passant par l'origine.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec le plan $\mathcal{P}$.

Exercice A2 Dans le repère cartésien de $\mathbb{R}^3$ (repère orthonormal), les 4 points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

forment un tétraèdre régulier. Cette structure modélise la géométrie de la molécule CH_4.

1. Montrer que le point O se situe au centre du tétraèdre ABCD (on fera une figure). À l'aide de ce modèle, retrouver les valeurs des angles $\widehat{HCH}$.
2. Montrer que (OAB) est le plan médiateur du segment $[CD]$.
3. Calculer l'arête et le volume du tétraèdre $ABCD$.

-B- Matrices : déterminant, inversion, changement de base

Exercice B1 On se donne les deux matrices carrées de dimension 3 suivantes :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

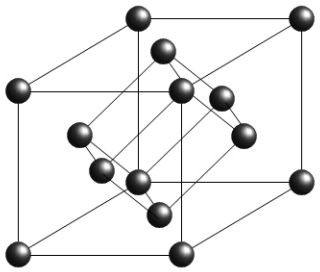
1. Calculer les produits matriciels $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\mathcal{A}$. Le produit est-il commutatif ?
2. Calculer les déterminants de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$. Vérifier une des propriétés des déterminants : $det(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = det(\mathcal{A}).det(\mathcal{B})$.

Exercice B2 Soit la matrice $\mathcal{S}$ suivante.

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice $\mathcal{S}$ est inversible.
2. Déterminer la matrice inverse $\mathcal{S}^{-1}$ en appliquant la méthode de Cramer : $\mathcal{S}^{-1} = \dfrac{1}{det(\mathcal{S})}\, Co_{\mathcal{S}}^{\top}$.

Exercice 3 Le nickel métallique cristallise dans une maille cubique à faces centrées (schéma ci-contre, les atomes de nickel occupent les 8 sommets et les centres des 6 faces d'un cube). On associe à la maille cubique la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ formée de vecteurs de même norme et orthogonaux. Dans cette base, la position d'un atome quelconque du cristal est déterminée par ses coordonnées x, y et z. Ce même atome s'exprime avec les coordonnées X, Y, Z relativement à la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ qui forme une maille rhomboédrique inscrite dans la maille cubique. On rappelle que, par définition, les angles formés entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, $\vec{C}$ et $\vec{A}$ sont tous égaux et différents de 90° et que les normes de ces vecteurs sont égales.



1. Exprimer la matrice de passage de la base cubique à la base rhomboédrique.
2. Expliciter aussi la matrice de passage de la maille rhomboédrique à la maille cubique.
3. Soit le point de coordonnées $(110)_C^{\top}$ par rapport à la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Quelles sont les coordonnées de ce point dans la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$? Inversement, quelles sont les coordonnées dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, du point de coordonnées $(110)_R^{\top}$ relativement à la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$?

1.2 Symétries et rotations dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on se donne 2 points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Former l'équation du plan (OAB). Soit $\vec{N}$ la normale à ce plan.
2. Soit un point M n'appartenant pas au plan (OAB) tel que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ne soit pas colinéaire à $\vec{N}$. Soit M' le symétrique de M par rapport à (OAB). Expliciter la matrice $\mathcal{S}_{(OAB)}$ de la symétrie orthogonale relativement à ce plan.
3. Comment se transforment les points suivants $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{(OAB)}$?

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la matrice $\mathcal{S}$ suivante :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice $\mathcal{S}$ est inversible et que $\mathcal{M} = \frac{1}{3}\,\mathcal{S}$ est orthogonale directe.
2. Montrer que $\mathcal{M}$ est une rotation d'axe passant par l'origine. Déterminer cet axe ainsi que l'angle θ de ladite rotation.
3. Calculer $\mathcal{S}^{-1}$, l'inverse de $\mathcal{S}$.
4. Exprimer $\mathcal{S}^n$ à l'aide des fonctions trigonométriques de $n\theta$, dans une base judicieusement choisie.

Exercice 3 L'espace est rapporté à la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les droites d'équation $D_1 : x = y = 0$ et $D_2 : x = y = z$.

1. Donner un vecteur directeur de D_1 et D_2. On les notera respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Quel est le point d'intersection de D_1 et D_2 ?
2. On souhaite déterminer l'image de D_1 par la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$ autour de l'axe D_2. Pour cela, on définit la base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que le vecteur $\vec{K}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{v}$.
   (a) Donner l'expression du vecteur $\vec{K}$. Soit $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$. Vérifier que $\vec{I}$ soit bien orthogonal à $\vec{K}$ et déduire $\vec{J}$ de telle manière à ce que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit orthonormée directe.
   (b) Expliciter la matrice $\mathcal{P}$ de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Montrer que $\mathcal{P}$ est une matrice de rotation. En déduire son inverse $\mathcal{P}^{-1}$.
   (d) Donner, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'expression générale de la matrice 3×3 de la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz). Utiliser ce résultat pour expliciter la matrice $\mathcal{R}^{\mathcal{B}'}_{D_2,\frac{\pi}{6}}$ de la rotation autour de D_2 d'un angle $\theta = \frac{\pi}{6}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (e) Déduire des questions précédentes la matrice $\mathcal{R}^{\mathcal{B}}_{D_2,\frac{\pi}{6}}$ dans la base $\mathcal{B}$ puis l'image de la droite D_1.

Exercice 4

1. Donner, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'expression générale de la matrice 3×3 de la rotation autour de l'axe Oz et d'angle $\theta = \pi$.
2. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la symétrie par rapport au plan xOy.
3. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la rotation autour de l'axe Oz et d'angle $\theta = \pi$ suivie par la symétrie par rapport au plan xOy. De quelle transformation s'agit-il ?

Exercice 5 Montrer que dans un cube le produit de la rotation d'un angle $\dfrac{\pi}{2}$ autour de la direction Oz par la rotation d'un angle $\dfrac{\pi}{2}$ autour de la direction Ox est équivalent à une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour d'un axe dit *ternaire* que l'on précisera. Ce produit est-il commutatif ?

Exercice 6 L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base orthonormale canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Montrer que la matrice
$$\mathcal{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
est celle d'une rotation.
2. Montrer que l'axe (Δ) de cette rotation est porté par le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
3. Déterminer une mesure algébrique de l'angle θ de cette rotation.
4. On se propose de décomposer la matrice de rotation $\mathcal{P}$ en produit de deux matrices de réflexion.
   (a) Montrer que la droite (Δ) appartient au plan $(\vec{i}, \vec{k})$. Donner alors l'expression de la matrice $\mathcal{S}_1$ de la réflexion par rapport à ce plan.
   (b) En utilisant les propriétés des matrices de réflexion, déterminer la matrice de symétrie orthogonale $\mathcal{S}_2$ telle que $\mathcal{S}_1\ \mathcal{S}_2 = \mathcal{P}$.

1.3 Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

Exercice 1 On donne la matrice $\mathcal{E}$ suivante exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres λ_i de $\mathcal{E}$. Pouvait-on prévoir le résultat sans calcul ?
2. Trouver les vecteurs propres ε_i de $\mathcal{E}$ et donner l'expression de $\mathcal{E}_D$, la matrice de $\mathcal{E}$ dans la base des ε_i.
3. Exprimer la matrice $\mathcal{P}$ de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base des ε_i et vérifier la relation des changements de base : $\mathcal{E}_D = \mathcal{P}^{-1}\ \mathcal{E}\ \mathcal{P}$.

Exercice 2 Dans le cas de l'anion allylique $CH_2 = CH - \overset{\ominus}{C}H_2$, l'énergie E des électrons qui sont délocalisés sur l'ensemble de la molécule (électrons du système π) est une valeur propre de la matrice $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux coefficients réels tels que $a > 0$ et $b < 0$.

1. Trouver les valeurs propres de $\mathcal{H}$. Sachant que $a > 0$ et $b < 0$, classer les 3 valeurs propres trouvées par ordre croissant.
2. Les fonctions d'onde électroniques correspondant aux 3 valeurs de E sont les vecteurs propres de $\mathcal{H}$. On les notera $\psi_i = (C_1, C_2, C_3)_i^\top$.
   Trouver les vecteurs propres ψ_i normés associés aux valeurs d'énergie E_i. On les exprimera en fonction de C_1.
3. Donner l'expression de $\mathcal{H}_D$, la matrice de $\mathcal{H}$ dans la base des vecteurs propres (ψ_1, ψ_2, ψ_3).

Exercice 3 Établir les solutions générales du système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x'(t) & = & 2x(t) & + & y(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) \end{array} \right.$$

On donne les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

Exercice 4 On donne la matrice $\mathcal{M}$ suivante exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice $\mathcal{M}$ et expliciter la matrice de passage $\mathcal{P}$ de la base canonique vers la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans laquelle $\mathcal{M}$ est diagonale.
2. Utiliser les résultats précédents pour :
   (a) trouver les solutions générales $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système différentiel linéaire suivant :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 8x(t) + 9z(t) \\ y'(t) = -3x(t) - y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -6x(t) - 7z(t) \end{array} \right.$$

   On pourra poser $V(t) = (x(t), y(t), z(t))^\top$ et $W(t) = (X(t), Y(t), Z(t))^\top = \mathcal{P}^{-1}V(t)$;
   (b) calculer $\mathcal{M}^k$.

2 Analyse

2.1 Préambule

-C- Intégrale simple

Exercice C1 Calculer les primitives des fonctions suivantes dont on précisera le domaine de définition.

$$f_1(x) = x\sqrt{x^2+1} \qquad f_2(x) = \frac{2x}{x^2-6x+5} \qquad f_3(x) = x^2\ln(x)$$

2.2 Intégrales multiples, changement de variable

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes sur le domaine D que l'on représentera :

1. $I = \iint_{D_1} x\sqrt{y}\ dx\ dy$
   $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leq x \leq a \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq a^2\}$ puis,
   $D_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leq x \leq a \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq x^2\}$
2. $J = \iint_{D_2} xy\ dx\ dy \qquad K = \iint_{D_2} (x^2+y^2)\ dx\ dy$
   $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}^{+*},\ b \in \mathbb{R}^{+*},\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$
3. $L = \iint_{D_3} \frac{x^2}{y^2}\ dx\ dy$
   $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$.

Exercice 2

1. En utilisant le changement de variables approprié, calculer l'intégrale suivante :
   $$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dx\ dy$$
   D étant défini comme la partie du plan (xOy) limitée par $\sqrt{x^2+y^2} = 2$ et $\sqrt{x^2+y^2} = 3$.
2. Calculer à nouveau cette intégrale dans le cas où D est défini comme la partie du plan (xOy) telle que $x \geq 0$ et $2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 | (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) \leq 0\}$.
Calculer l'aire de D.

Exercice 4 Pour l'atome d'hydrogène dans son état fondamental, la distance moyenne entre l'électron et le noyau est donnée par l'expression suivante :

$$< r_{1s} > = \iiint_V r\ \Psi_{1s}^2\ dV$$

avec l'expression de Ψ_{1s} donnée en coordonnées sphériques :

$$\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_o^3}}\ \exp\left(\frac{-\ r}{a_o}\right)$$

Exprimer l'élément de volume dV en coordonnées sphériques et montrer que la distance moyenne électron-noyau est égale à $\dfrac{3\ a_o}{2}$.

Remarque : on utilisera, sans le démontrer, le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-qx} dx = \frac{n!}{q^{n+1}}$

2.3 Analyse de Fourier

Memento :

– Développement en série de Fourier des fonctions périodiques

Soit f une fonction périodique de période T. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la fonction est décomposable en une somme infinie de termes sinusoïdaux :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t) \quad \text{avec } \omega_n = \frac{2\pi\ n}{T}$$

Les coefficients a_0, a_n, et b_n sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\ dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cos(\omega_n t)\ dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\sin(\omega_n t)\ dt$$

On peut donc considérer f comme la somme :
- d'un terme constant a_0 (valeur moyenne)
- d'un nombre infini de termes sinusoïdaux ($n = 1$: terme fondamental de pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$; $n > 1$: harmoniques de pulsation ω_n).

L'harmonique de rang n s'écrit : $u_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$ et peut aussi se mettre sous la forme $u_n(t) = A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$ avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}$ (si $a_n \neq 0$).

Remarque : En utilisant les coefficients de Fourier complexes, on obtient la décomposition :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\ e^{i\omega_n t}$$

où les c_n sont les coefficients de Fourier complexes de f donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) e^{-i\omega_n t}\ dt$$

Les coefficients c_n de la série complexe peuvent être déterminés directement par le réarrangement des termes sinus et cosinus de la série trigonométrique. On obtient les relations suivantes, toutes valables pour n positif :

$$c_0 = a_0 \qquad a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Par ailleurs, on a aussi $c_n = \frac{A_n}{2}$ et $\arg(c_n) = -\varphi_n\ [2\pi]$.
Si on représente l'amplitude A_n des différentes harmoniques en fonction de leurs fréquences $\frac{\omega_n}{2\pi}$, on obtient un diagramme en bâtons appelé spectre des fréquences de f.

– Transformée de Fourier

Si la fonction f n'est pas périodique, il est exclu d'utiliser le développement précédent. On peut néanmoins considérer qu'une fonction non périodique est en fait une fonction de période infinie.
Or, si T est très grand, l'ensemble des fréquences $\frac{n}{T}$ est un ensemble qui couvre presque toutes les fréquences possibles. On passe d'un ensemble discret à un ensemble continu de fréquences. On appelle alors transformée de Fourier de f, la fonction $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

La fonction f peut alors s'exprimer par sa décomposition sur les fonctions de base $e^{i\omega t}$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

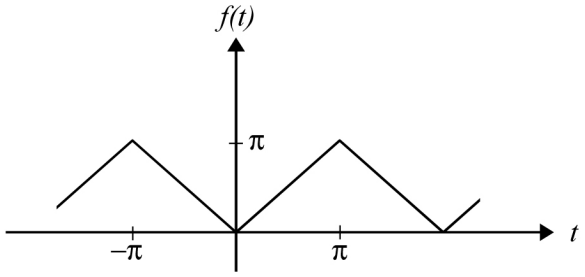
Les variables (muettes) t et ω sont dites conjuguées pour la transformation de Fourier. Leur produit s'exprime comme un angle.

Exercice 1 On considère la fonction périodique de la variable t définie comme suit :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in]0;\pi[\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = \pi \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement $f(t)$ et calculer a_0.
2. Calculer les coefficients a_n et b_n et donner le développement en série de Fourier de $f(t)$.
3. Représenter le spectre de Fourier de f, c.à.d. $\frac{a_n}{a_1}$ en fonction de n.

Exercice 2 Soit la fonction $f(t)$ de période 2π représentée ci-dessous.



1. Donner le développement en série de Fourier de $f(t)$.
2. Soit $t = \pi$. Déduire du résultat précédent la valeur de la série suivante :

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercice 3 On considère la fonction f de période T, définie pour $\forall t \in]-\infty; +\infty[$ et valant $f(t) = e^{-at}$ $\forall t \in [0; T]$. On suppose que aT est tel que $e^{-\frac{aT}{2}} << 1$.

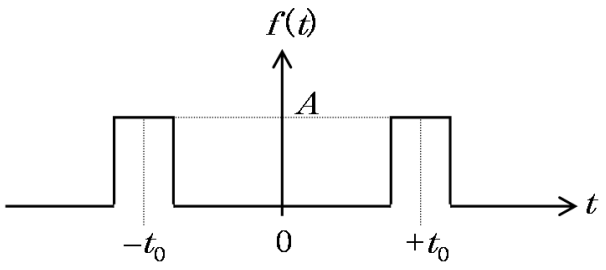
1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f sur la base des $e^{i\omega_n t}$. Calculer les coefficients c_n de cette série et les mettre sous la forme $c_n = u_n + iv_n$.
2. Vérifier que $c_{-n} = \overline{c_n}$ (complexe conjugué de c_n). En déduire une expression de f sous la forme :
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{(i\omega_n t)} + \overline{c_n} e^{(-i\omega_n t)} \right)$$
3. En déduire la série de Fourier de f sur la base des fonctions sinus et cosinus.
4. On considère la fonction g définie pour $\forall t \in]-\infty; +\infty[$ et valant $g(t) = f(-t) \forall t \in [-T; 0]$. Déduire e la question précédente la série de Fourier de $g(t)$.
5. Soit à présent la fonction h définie pour $\forall t \in]-\infty; +\infty[$ et valant $h(t) = f(t) + g(t)$. Justifier l'expression obtenue pour la série de Fourier de $h(t)$ par des considérations de parité.

Exercice 4 Soit $\mathcal{F}(\omega)$ le spectre (sur la base des exponentielles complexes) d'une fonction f non périodique de la variable t, défini par :

$$\mathcal{F}(\omega) = \begin{cases} A & \text{pour } \omega \in](\omega_0 - \Delta\omega); (\omega_0 + \Delta\omega)[\text{ où } \Delta\omega \text{ est quelconque} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction $f(t)$ dont $\mathcal{F}(\omega)$ est le spectre.
2. Représenter $|f(t)|$
3. Soit Δt l'intervalle entre les deux premières valeurs de t qui annulent $f(t)$. Montrer que l'on a la relation $\Delta\omega\Delta t = 4\pi$.

Exercice 5 Soit f la fonction de la variable t représentée par le graphe suivant :



Cette fonction est nulle partout sauf sur les deux créneaux (de largeur Δt et centrés respectivement en $t = +t_0$ et $t = -t_0$) où elle vaut A.

1. Déterminer (sur la base des exponentielles complexes) le spectre $\mathcal{F}(\omega)$ de cette fonction f.
2. Représenter $|\mathcal{F}(\omega)|$.

Exercice 6 L'expression générale de l'évolution de l'amplitude d'un oscillateur harmonique amorti au cours du temps s'écrit :

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ X_0\, e^{-\lambda t} \sin(\Omega t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

où λ et Ω sont des coefficients réels et positifs.

1. Représenter l'allure de $X(t)$.
2. En utilisant l'expression de $\sin(\Omega t)$ en fonction des exponentielles complexes, calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\omega)$ de la fonction $X(t)$ définie ci-dessus (le résultat sera une fonction de ω, dépendant aussi des paramètres X_0, λ et Ω du problème).
3. On pose $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$.
   Donner la nouvelle expression de $\mathcal{F}(\omega)$ obtenue en éliminant le paramètre Ω. En déduire $|\mathcal{F}(\omega)|$ défini par $|\mathcal{F}(\omega)| = \left(\mathcal{F}(\omega).\overline{\mathcal{F}(\omega)}\right)^{1/2}$.
4. Déterminer la valeur de ω qui rend la fonction $|\mathcal{F}(\omega)|$ maximum. Déterminer le comportement de cette fonction pour $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$ puis représenter $|\mathcal{F}(\omega)|$.
5. Du point de vue de l'oscillateur, que représente la courbe de $|\mathcal{F}(\omega)|$?

Formulaire mathématique

Relations de trigonométrie

•Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

•Relations entre les carrés :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \qquad 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

•Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

•Définition en fonction de la tangente de l'arc moitié :
sous réserve de définition de la tangente, en notant $t = \tan \frac{a}{2}$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

•Formules de linéarisation :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)) \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

•Transformation d'une somme ou différence en produit :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

•Formule d'Euler :

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

Dérivée et primitive des fonctions usuelles

Notations : fonction $f(x)$, dérivée $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ et primitive $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	cx	e^x	e^x	e^x
1	x	$\frac{1}{2}x^2$	$a^x \ln(a)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
ax^{a-1}	$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\log_a(x)$	$\frac{x\ln(x) - x}{\ln(a)}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\sin(x)$	$\cos x$	$\sin(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccot}(x)$	$x\,\mathrm{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{Arsinh}(x)$	$x\,\mathrm{Arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Arcosh}(x)$	$x\,\mathrm{Arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$-\ln(\cosh(x))$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Artanh}(x)$	$x\,\mathrm{Artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$
$\frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$\coth(x)$	$\ln\lvert\sinh(x)\rvert$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Arcoth}(x)$	$x\,\mathrm{Arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$

Règles de différentiation et d'intégration

notation	$f' = \frac{d}{dx} f(x)$	notation	$\int_a^b f\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$
intégrale	$\left(\int_a^x f\,dt\right)' = f(x)$	théorème fondament.	$\int_a^x f\,dt = [F]_a^x = F(x) - F(a)$
constante	$(c.f)' = c.f'$	constante	$\int_a^b c.f\,dt = c.\int_a^b f\,dt$
somme	$(f \pm g)' = f' \pm g'$	somme	$\int_a^b (f \pm g)\,dt = \int_a^b f\,dt \pm \int_a^b g\,dt$
produit	$(f.g)' = f'.g + f.g'$	intégration par parties	$\int_a^b (f'.g)\,dt = f.[g]_a^b - \int_a^b f.g'\,dt$
chaîne	$(f(g(x)))' = \frac{df(g)}{dg}.g'(x)$	substitution	$\int_a^b f(g).g'(t))\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)\,dg$
différentiat. log. $f, g > 0$	$(f^g)' = f^g\left(g'\ln(f) + g\frac{f'}{f}\right)$	intégrat. log.	$\int_a^b \frac{f'}{f}\,dt = [\ln\lvert f(t)\rvert]_a^b$
quotient	$\left(\frac{f}{vg}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	intervalles	$\int_a^c f\,dt + \int_c^b f\,dt = \int_a^b f\,dt$
fonct. inverse	$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{\frac{d}{dx} f\,(f^{-1}(x))}$	bornes $b = a$	$\int_a^a f\,dt = 0$
3-produit	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$	commutation	$\int_a^b f\,dt = -\int_b^a f\,dt$
3-chaîne	$(f(g(h(x)))' = f'(g)g'(h)h'(x)$	f impaire, $a = -b$	$f(t) = -f(-t) : \int_{-b}^b f\,dt = 0$