Université de Paris 7 **(F.Han[1])**

TP09 Polynôme caractéristique

agreg 2019-2020

Exercice I:

1) Comparez sur quelques exemples pour une matrice A à cofficients entiers les temps de calcul de son polynome caractéristique par $\det(A-xI)$ (par une méthode de type pivot) et par une fonction dédiée du logiciel.

2) Expliquez le calcul du polynôme caracterisque par interpolation de Lagrange et le cout sur le corps de base.

Exercice II: Polynôme Caractéristique ; Th Cayley-Hamilton. Méthode de Faddeev

Soit A une matrice de taille n, I l'identité de taille n, et $M = X.I - A$. Nous allons déduire de la formule

$$^tM^{adj}.M = M.^tM^{adj} = \det(M).I \ (*)$$

une méthode pour calculer le polynôme caractéristique de A, et aussi une preuve du théorème de Cayley-Hamilton. (où M^{adj} est la matrice adjointe ou comatrice de M)

On note $\det(M) = P_A(X) = \sum_i a_i.X^i$ le polynôme caractéristique de A. On écrit $^tM^{adj} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i.X^i$ où B_i est une matrice de taille n. On déduit de la formule $(*)$:

$$a_i.I = B_{i-1} - B_i.A \ (**)$$

et $B_{n-1} = a_n.I = I$

On remarque de plus que $P'_A(X) = tr(M^{adj}) = \sum_i tr(B_i).X^i$. On obtient alors les B_i par récurrence décroissante à partir de $B_n = I$ grâce aux formules[2] :

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{tr(B_iA)}{i-n} \\ B_{i-1} = B_i.A + a_i.I \end{cases}$$

1) a) Calculer P_A et A^{adj} par cette méthode.

b) Vérifiez et faites quelques tests.

c) Donnez une estimation du nombre de multiplications sur le corps de base pour trouver P_A par cette méthode.

Exercice III: Polynôme caractéristique ; Mineurs diagonaux

On considère une matrice A de taille $n \times n$ et la matrice d diagonale $(x_1, \ldots, x_n)$, et l'on note $F(x_1, \ldots, x_n) = \det(A - d)$.

1) Comparez les mineurs diagonaux[3] de A de taille $n-2$ avec $\dfrac{\partial^2 \det(A-d)}{\partial x_u \partial x_v}$ évalué en $(0, \ldots, 0)$ pour u, v des entiers distincts entre 1 et n. Généralisez ce résultat avec les mineurs diagonaux de taille $n-i$ et les dérivées i-ièmes.

2) On note $P = \det(A - x \cdot I)$ le polynôme caractéristique de A.

3) Exprimez la dérivée i-ième de P en 0 en fonction des dérivées de F.

4) Quels sont les coefficients de P en fonction de ses dérivées en 0 ? Conclure[4] que le coefficient de x^{n-i} de P est $(-1)^{n-i}$ fois la somme des mineurs[5] diagonaux de taille i de A.

1. http://webusers.imj-prg/frederic.han/agreg
2. prendre la trace dans $(**)$
3. ie. on ne supprime que des lignes et colonnes de même indice.
4. Pour une application de cette formule, TP graphes, nombre de triangles dans un graphe, ... prop 3.3, 3.6, 3.7
5. il y en a C_n^i