Memento sur les coniques

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine Euclidien réel. On note h son produit scalaire sur $\vec{\mathcal{E}}$.

Deux approches possibles pour la définition: géométrique ou algébrique.

Point de vue géométrique

• **Définition:** (Géo) Une partie C de $\mathcal{E}$ est une conique si elle contient au moins 2 points distincts et s'il existe un point $O \in \mathcal{E}$, une forme quadratique non nulle q sur $\vec{\mathcal{E}}$, une forme linéaire l sur $\vec{\mathcal{E}}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que:

$$C = \{M \in \mathcal{E} \mid q(\overrightarrow{OM}) + l(\overrightarrow{OM}) + k = 0\}$$

Autrement dit C est une conique si et seulement si C contient 2 points distincts, et s'il existe un repère de $\mathcal{E}$ et une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que C soit le lieu d'équation:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

• **Proposition:** (Pas si simple?) Une conique contient une infinité de points, et le repère étant fixé, la donnée du lieu géométrique C détermine A à facteur près.

Nous garderons le point de vue algébrique suivant:

Point de vue Algébrique

• **Définition:** (Alg) Une conique de $\mathcal{E}$ est la donnée d'une application polynomiale de degré 2 $f: \ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ à facteur non nul près.

Pour tout point $O \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique[1] non nulle q sur $\vec{\mathcal{E}}$, une forme linéaire l sur $\vec{\mathcal{E}}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que:

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + l(\overrightarrow{OM}) + k$$

Lorsque l'on se fixe un repère de $\mathcal{E}$ alors la donnée de f équivaut à la donnée d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

• NB: Avec la définition algébrique, une conique peut être vide ou réduite à un point réel.

• **Proposition:** (Classification) La signature de q définie 3 type de coniques:

$(2,0)$ ou $(0,2)$ ellipse, $(1,1)$ hyperbole, $(1,0)$ ou $(0,1)$ parabole.

• **Proposition:** (Centre) Si q est de rang 2, alors C admet un unique centre de symétrie, appelé centre de C.

Exercice I: Quelles sont les paraboles ayant un centre de symétrie?

• **Proposition:** Si C a pour équation $F(x,y) = 0$ dans un repère (quelconque) $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, son centre est déterminé par le système: $\begin{cases} \partial F/\partial x = 0 \\ \partial F/\partial y = 0 \end{cases}$.

Exercice II:

Traduire la propriété précédente en terme d'orthogonalité pour A. Pourquoi dit ont parfois que le centre est l'orthogonal pour C de la droite de l'infini.

• **Définition:** (Coniques dégénérées, coniques propres) On dit que C est une conique dégénérée si son équation se factorise dans $\mathbb{C}$ en un produit de deux équations de degré 1. Si C n'est pas dégénérée, on dit qu'elle est propre.

Exercice III: *(A retenir)* Montrer que C est dégénérée si et seulement si $\det A = 0$ où A est la matrice ci dessus.

• **Proposition:** Si C admet un centre appartenant à C, alors C est dégénérée.

• **Proposition:** (Tangentes; Conique duale)

On rappelle que si C est une conique non dégénérée, alors la tangente en un point (x_0, y_0) de C a pour équation $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

[1] q est en fait indépendante de O

On en déduit qu'une droite affine d'équation $u_0.x+u_1.y+u_2=0$ est tangente à C si et seulement si $\sum_{0\leq i,j\leq 2} b_{i,j}u_i.u_j = 0$ où la matrice $(b_{i,j})$ est l'inverse de A. L'ensemble des droites tangentes à C sera appelé la conique duale de C.

• **Définition:** (Axes) Si C est invariante par une symétrie orthogonale, on dit que l'axe et la direction de cette symétrie sont des axes de C.

• **Définition:** (Sommet d'une parabole) Si C est une parabole propre, alors elle admet une unique symétrie orthogonale. De plus, il existe un unique point S de C tel que la tangente en S à C soit parallèle à la direction de cette symétrie orthogonale. On appelle S le sommet de C.

• **Définition:** (Directions asymptotiques, asymptotes) Un vecteur non nul $u \in \vec{\mathcal{E}}$ donne une direction asymptotique si $q(u) = 0$. Une droite d est une asymptote de C si C possède un centre inclus dans d, et si d a pour vecteur directeur une direction asymptotique.

Exercice IV: Montrer qu'une hyperbole a deux asymptotes distinctes, et donner l'équation d'une hyperbole dans un repère dont les vecteurs dirigent les asymptotes.

Exercice V: On appelle directions de symétrie orthogonale de C des vecteurs formant une base h-orthonormale et q-orthogonale.

1) Montrer que si C admet une symétrie orthogonale, les vecteurs directeurs unitaires de ces axes sont des directions de symétrie orthogonale.

2) Montrer que si C admet une infinité de directions de symétrie orthogonales, c'est un cercle.

• **Définition:** (Equation réduite) On appelle équation réduite de C, son équation dans un repère h-orthonormé et q-orthogonal, d'origine le centre de C si C n'est pas une parabole, alors que si s'en est une, on prend pour origine son sommet.

-Ellipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a \geq b)$

-Hyperbole propre: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

-Parabole: $y^2 - 2px = 0$.

Exercice VI: Dans un plan affine Euclien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la conique C d'équation: $-x^2 - 2xy + 3y^2 - x + 5y + 3 = 0$.

1) Quelle est la nature de cette conique? (On précisera s'il y a lieu son centre et ses asymptotes)

2) a) Donner les équations des hyperboles passant par les points $(1, 1)$ et $(0, 1)$, et ayant des asymtotes orthogonales à celles de C.

b) Parmis les hyperboles précédentes, lesquelles sont tangentes à l'asymptote de C qui est parallèle à l'une des bissectrices du repère?

Université de Paris 7 **TP12** **agreg 2020 (F.Han[2])**

Exercice VII:

Prendre 5 points du plan au hasard avec votre logiciel et retournez une équation d'une conique contenant ces 5 points.

Exercice VIII:

Expliquez et illustrez une méthode pour paramétrer une conique avec des fractions rationnelles, et comment l'appliquer au calcul de primitives de fractions rationnelles en x et $\sqrt{x^2 + ax + b}$.

Exercice IX:

1) Montrez que résoudre l'équation:

$$u^4 + 4 \cdot u^3 - 4 \cdot u^2 - 2 \cdot u + 1 = 0$$

revient à résoudre un système

$$y^2 = x, q(x, y) = 0$$

où q est une équation de degré 2 à préciser. Donnez les matrices A_1 et A_2 associées à ces 2 coniques.

2) Donnez les équations des coniques dégénérées q' telles que les espaces engendrés par $y^2 - x, q(x, y)$ et $y^2 - x, q'(x, y)$ soient identiques. On exprimera les solutions q' en fonction des racines d'un polynome P de degré 3 à préciser.

[2] http://webusers.imj-prg.fr/~frederic.han/agreg/OptionC

3) Dessinez toutes ces coniques et expliquer pourquoi une équation de degré 4 peut être résolue par radicaux sachant que les équations de degré 3 peuvent l'être.

4) Choisissez une conique dégénérée du pinceau et factorisez son équation. Le polynome P est il scindé dans son corps de rupture?

5) On cherche à résoudre le système:

$$y^2 - x, x^2 - 4y^2 + 4xy - 2y + 1$$

Pour cela, on remarque que si t est une racine du polynôme

$$P = -x^3 + 4 * x^2 + 12 * x - 36$$

alors l'équation

$$C_t = t(y^2 - x) + x^2 - 4y^2 + 4xy - 2y + 1$$

se factorise dans $Q[t]$.

Pour des être efficace et pour comprendre des situations plus difficiles, on ne souhaite pas résoudre P par radicaux. Trouvez cependant la factorisation de C_t sans avoir besoin d'expliciter t, et en déduire une méthode pour exprimer les solutions du système en fonction de t.