

**Exercice I: Paramétrisation d'une conique projective.**

1) Créer une conique  $\mathcal{C}$  lisse de  $\mathbb{P}_2$  au hasard passant par le point  $(1, 1, 1)$ .

2) En déduire une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  par  $\mathbb{P}_1$ .

3) a) Trouver une forme paramétrique de la tangente en un point général de  $\mathcal{C}$ .

b) Trouver son équation cartésienne.

c) Dessiner une partie affine de ces constructions. On pourra créer une fonction `paff` qui converti des coordonnées homogènes en l'abscisse du point affine correspondant.

**Exercice II: Génération ponctuelle des coniques**

On notera  $\mathbb{P}_2$  le complété projectif de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $O_1$  le point  $(0, 0, 1)$  et  $O_2$  le point  $(0, 1, 0)$  (on pourra prévoir de pouvoir changer facilement  $O_2$ , pour ensuite essayer de le faire pour  $O_2 = (1, 0, 1)$ ).

1) a) Donner deux façons de paramétrer par  $\mathbb{P}_1$  les droites passant par un point. (L'une adaptée aux équations cartésiennes, l'autre adaptée à une forme paramétrique)

b) On considère une homographie  $h$  du faisceau des droites passant par  $O_1$  dans celui des droites passant par  $O_2$ . Modéliser cette homographie en utilisant des coefficients formels.<sup>2</sup>

2) a) Déterminer (sous forme paramétrique) l'intersection d'une droite et de son image par  $h$ . (On choisira bien la façon de paramétrer les droites passant par  $O_1$ , resp  $O_2$ )

b) Quels cas de matrice  $A$  inversible vous pose problème ?

3) En déduire l'équation homogène du lieu décrit par ce point ; Commentez.

a) Donner des solutions évidentes.

b) Que se passe-t'il si  $h(O_1O_2) = (O_1O_2)$  ? Donner une CNS pour que cette condition soit réalisée.

4) Recommencer avec  $O_2 = (1, 0, 1)$ , mais cette fois en n'utilisant que les équations cartésiennes pour décrire les deux pinceaux de droites.

5) a) Montrer que la conique est lisse si et seulement si  $h(O_1O_2) \neq (O_1O_2)$ .

b) En déduire le théorème de **génération ponctuelle des coniques**. (On n'oubliera pas le cas dégénéré).

6) Choisir une homographie, et faire un dessin, de la conique, d'une droite et de son image et du point d'intersection. (On pourra mettre un bouton pour le paramètre, on remarquera aussi que l'on peut dessiner les droites directement par équation cartésienne).

<sup>1</sup><http://www.math.jussieu.fr/~han/agreg>

<sup>2</sup>On pourra représenter le pinceau en  $O_1$  sous forme cartésienne, et celui en  $O_2$  sous forme paramétrique.