

Minimum à retenir/ réviser avant l'épreuve, et donc à archiver cette année : 1) Etre habitué à utiliser l'aide.

2) opérations classiques en mode exact, approché, algèbre linéaire, calcul modulaire et polynomial. Notamment, pgcd, couples de Bezout, produit de matrices, noyau (y compris pour un élément de $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$,

3) Quelques instructions de programmation : boucles `for`, `while`, suite : `seq`. Créer une fonction une procédure, créer une fonction à partir d'un symbole, passer en mode debug et afficher une variable pas à pas.

4) Quelques instructions graphique : fonctions (paramétriques, implicites, statistiques; ex histogrammes) et géométrie (points, droites...)

I Choisir sa configuration

⚠ Le jour de l'épreuve les valeurs par défaut ne coïncideront pas forcément avec vos préférences. Au premier lancement on répond à quelques questions, on peut ensuite modifier/affiner ses choix dans le menu `Cfg`. Puis Sauver les grâce au menu. Il faut donc choisir le mode `xcas` ou `maple`, et étudier la configuration du "cas" pour ne pas mal interpréter les réponses.

Les différences entre les modes `xcas` et `maple` : i et I , les tableaux commencent à 0 contre 1 le symbole `%` est réservé au calcul modulaire pour `xcas`, au dernier résultat pour `maple`. Les commentaires sont `//` resp `#`. L'instruction `subs` prend ses arguments dans des ordres inversés.

Pour la configuration du "cas", je conseille de : `COCHER radians`, et de `DÉCOCHER : approx, complex, Cmpx_var, Sqrt`. On travaillera ainsi en mode exact dans le corps engendré par les coefficients de l'expression, alors que si l'on coche `complex` ou `Sqrt`, on rajoute I et des racines carrées ce qui ne permet pas par exemple une factorisation de polynôme sur un corps prescrit.

Exercice I:

1) Trouver un endroit pour découvrir rapidement le logiciel à partir d'exemples : Ex pour `xmaxima`, la page d'accueil, pour `maple` : étudier dans le menu "introduction" de l'aide, le lien "How to perform basic task". Pour `xcas`, le menu calcul formel de l'aide, ou le tutoriel, mais aussi/surtout l'index.

2) a) Comment obtenir de l'aide sur un mot donné (par exemple `sqrt`) on fait : `?sqrt`. Par exemple, comment fait on $\sqrt[3]{23}$?

b) Donner une valeur approchée des résultats précédents. (Soit en forçant `xcas` à être en flottants (Ex 23. ou `approx(23)`), soit avec `evalf`).

c) Trouver la syntaxe des constantes réelles ou complexes π , e , i (où $i^2 = -1$). Faire afficher les 1000 premières décimales de π .

d) Faire `?digits`. Que faut il faire pour travailler par défaut avec 1000 chiffres ?

3) a) Attribuer à la variable P la forme développée du polynôme suivant $(2x + 1)^2 \frac{x^5 - 1}{x - 1}$. (On aura peut être aussi besoin de faire simplifier les résultats)

b) Essayer `factor(P)` ; Sur quel corps `xcas` a t'il travaillé ?

c) Factoriser $x^{12} - 1$ dans $\mathbb{Z}[x]$. En factorisant des polynômes judicieusement choisis, obtenir la valeur du polynôme cyclotomique Φ_{12} ?

4) a) Effectuer un changement de variable pour que les inégalités $0 < a < b < c$ soient facile à lire.

b) Démontrer en demandant un calcul élémentaire au logiciel que

$$3/2 \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

c) On pose $a = e^{\frac{2i\pi}{12}}$. Vérifiez que a^{12} vaut bien 1 pour `xcas`. Etudier $e^{\frac{2i\pi}{9}}$.

d) Factorisez P dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$. Peut t'on espérer un résultat exact ?

e) Factoriser $X^{12} - 1$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i]$ et sur $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/9}]$.

f) Vérifiez que $1 + i\sqrt{3}$ est bien dans $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/9})$.

Exercice II:

1) Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$ (où a est une variable formelle).

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{2 + \sin x} dx$, ainsi qu'une primitive P de $\frac{\cos 5x}{2 + \sin x}$. Dériver P et vérifiez que c'est correct. (Le jury apprécie l'esprit critique)

Exercice III: Dénombrement et séries

¹<http://www.math.jussieu.fr/~han/agreg>

génératrices.

1) Afficher le coefficient de t^3 dans la série formelle associée à $\prod_{i=1}^4 \frac{1}{1-a_i.t}$?

2) Généraliser l'exemple précédent pour en déduire le nombre d'éléments croissants dans $\{1, 2, 3, 4\}^n$, puis dans $\{1, \dots, k\}^n$

3) Quel est le cardinal de :

$\{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid 0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_5, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 208\}$

4) En adaptant la formule $\sum_{n>0} p_n.t^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}$ où p_n est le nombre de partitions de n , calculer p_{50} .

5) Trouver le coefficient de $a^3b^2cd^2$ dans $(a + b + c + d)^8$. Vérifier votre réponse théorique avec la forme développée. (On pourra étudier l'aide de `coeff` pour récupérer le coefficient d'un monôme).

Exercice IV: Initiation à la géométrie

1) Découverte de quelques possibilités.

a) Ouvrir un écran de géométrie, dessiner les sommets d'un pentagone régulier grâce aux affixes de ses sommets. On pourra utiliser une suite. On pourra deviner les syntaxes en créant des objets à la souris. Comment supprimer un objet ?

b) Dessiner un coté de ce pentagone.

c) Dessiner une droite d de vecteur directeur d'affixe $e^{2i\pi/3}$ passant par $(3, 0)$. Dessiner la droite d'équation cartésienne $2x + 3y + 1 = 0$. Modifier la couleur, à la souris ou dans la commande. Dessiner le point A d'intersection de ces 2 droites.

d) Créer un paramètre t de $[-5, 3]$ grâce à la fonction `element`, et tracer la droite perpendiculaire à d passant par $(t, 0)$

2) **Illustration d'un graphe**

a) On encode un graphe à n sommets par une suite de triplets : $[i, j, k]$ où $i \leq j$, exprimants le fait qu'il y ait k chemins entre les sommets i et j . (où $k > 0$). Pour dessiner le graphe, on forme avec les sommets un polygone régulier. On affectera à n une certaine valeur que l'on pourra changer ensuite.

b) Définir l'ensemble S des points représentant les n sommets. (Ils doivent être bien marqués).

c) Créer une fonction permettant de tracer k chemins entre 2 points : on pourra prendre des arcs de cercle. On pourra même les choisir pour être sur qu'ils ne passent pas par 3 sommets. (Comment ?)

Exercice V: Editeur de programme

On peut créer des procédures courtes en ligne,

et même sur plusieurs lignes en utilisant `shift entrée`. En revanche il est souvent plus clair d'utiliser l'éditeur de programmes.

1) Créer une procédure `puis:=proc(a,n)` qui calcule a^n ainsi : A, B, C sont initialisés respectivement à $1, a, n$, et l'on exécute tant que $C > 0$: si C est impair $A :=A*B ; C :=(C-1)/2 ; B :=B*B$; sinon $C :=C/2 ; B :=B*B$; et qui retourne A

2) a) En utilisant `debug(puis(2,71))`, étudier les valeurs de A, B, C . (utiliser le bouton `watch`, et regarder la valeur de la variable tout en bas.)

b) Comparer les passages dans les 2 cas avec l'écriture en base 2 de n

Exercice VI:

Construire 2 cercles $C_i(O_i, r_i)$, étudier comment trouver le centre d'une homothétie envoyant C_1 sur (C_2) , et en déduire comment construire les tangentes communes aux 2 cercles. Préparer une illustration en vue d'un petit exposé.