TP01 : Algèbre Linéaire

Exercice I: Algèbre linéaire

1) En utilisant l'instruction `seq`, créer une matrice identité de taille 4, puis une matrice diagonale de valeurs propres $1, 2, 3, 4$

2) Essayer/commenter `A :=matrix(4,4)+1 ;` Calculer l'image par A du vecteur `v :=[seq(1,j=1..4)] ;`

3) a) Faire une fonction qui à (i, j) associe (i, j) si $i \leq j$, (j, i) sinon.

b) Faire une fonction qui à (i, j) associe 0 si $i = j$, $a_{i,j}$ si $i < j$, $-a_{j,i}$ si $i > j$. (où $a_{i,j}$ sont des variables formelles).

c) Calculer le déterminant d'une matrice antisymétrique formelle [2] de taille $2, 4, 6$ (sans faire afficher les grosses valeurs) et le factoriser. Que remarquez vous ?

d) Pour une matrice antisymétrique formelle de taille 8. ⚠ On n'affichera pas le resultat. (en mode maple `:`) ou (en mode xcas `:;`) comparer le temps de calcul du déterminant avec les 2 fonctions différentes disponibles. On étudiera aussi les informations disponibles sur les algorithmes utilisés dans la documentation. (Menu : *Aide > Algorithmes*)

Exercice II: Matrices nilpotentes

Imaginez un texte vous expliquant la décomposition de Jordan pour une matrice nilpotente. Il s'agit ici de l'illustrer en montrant d'abord comment créer un bon exemple, et ensuite en illustrant la méthode par une résolution pas à pas de votre exemple. Notamment la façon de choisir les vecteurs de base, et les conditions qu'ils doivent vérifier. On pourrait par exemple faire ainsi :

1) Evidemment, pour créer un bon exemple, il faut partir de la réponse voulue !

a) Créer (sans taper tous les coefficients) une matrice sous forme de Jordan de taille 8×8 dont le module associée soit $k[X]/X^8$ où k est le corps de base.

b) Le cas précédent étant trop simple pour expliquer la méthode, annuler quelques coefficients dans la matrice précédente pour obtenir une matrice $J_{3,3,2}$ dont le module[3] associé soit : $k[X]/X^3 \times k[X]/X^3 \times k[X]/X^2$

2) a) Pour $i \neq j$, créer une fonction créant une matrice de transvection : $T(i, j, a) = I + a.E.$ (où $E_{k,l} = 1$ si $(i, j) = (k, l)$, 0 sinon).

b) Expliquer au Jury, et illustrer le lien entre ces matrices et les opérations sur les lignes et les colonnes d'une matrice. (A RETENIR)

c) Quel est l'inverse de $T(i, j, a)$? Que représente la conjugaison par $T(i, j, a)$ en terme d'opérations lignes/colonnes ?

d) En utilisant par exemple 4 transvections, créer une matrice de passage P et un exemple non trivial de matrice N conjuguée à $J_{3,3,2}$.

3) Expliquer maintenant pas à pas la mise sous forme de Jordan de N. (Justifier avec soins les indépendances de certains vecteurs.)

4) Soit p un nombre premier. Quel est le cardinal du stabilisateur de $J_{3,3,2}$ pour l'action de $GL_8(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ par conjugaison ? Combien y a t'il de matrices nilpotentes dans cette classe ? (Si vous rencontrez des difficultés pour cette question, peut être devriez vous justifier la question précédente plus soigneusement)

Exercice III: Syntaxe d'algèbre linéaire via la combinatoire des matrices nilpotentes

1) Affecter à n la valeur 5, et créer une matrice formelle $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n^2-n+1} & \dots & a_{n^2} \end{pmatrix}$. On pourra le faire de 2 façons différentes. En créant la matrice à partir d'une fonction, ou bien en convertissant une liste $[a_1, \dots, a_{n^2}]$ en une matrice.

2) a) Créer une matrice J nilpotente de taille 5 avec 2 blocs de jordan de taille 2, et calculez le commutateur : $AJ - JA$

b) En déduire la matrice C de l'application linéaire de $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $M \mapsto MJ - JM$ dans la base de votre choix. Quelle est la dimension du commutateur de J ?

c) Dessinez au brouillon la partition, et comparez[4] avec la somme des carrés des hauteurs des colonnes.

3) a) Trouver une façon d'obtenir le noyau d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Vous devez toujours avoir un esprit critique sur ce que vous demandez à l'ordinateur, illustrez donc avec

[1] http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg

[2] Cf pfaffien.

[3] On utilise souvent $\oplus$ à la place de $\times$. Il faut alors pouvoir répondre à la question d'oral : "quelle est la définition de $\oplus$?", ou bien, "pourquoi y a t'il 2 symboles ?"

[4] un élément du commutateur est déterminé par le choix de l'image des vecteurs primitifs ce chaque bloc.

un exemple de taille 1×1 que votre instruction fait ce que vous voulez.

b) En déduire une base du commutateur de J dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

c) Trouver un moyen rapide d'obtenir via votre logiciel un élément de coordonnées données (par exemple $(1, \ldots, 1)$ dans cette base. (par ex avec un produit de listes).

4) a) Etudier `[1,2,3]*[a,b,c,d,e]`. Faites trouver l'écriture en base 2 de 67 et de 0. Comment créer une liste vide ? Comment enlever les crochets de `[1,2,3]`. Comment ajouter un élément à une liste ?

b) k étant un nombre donné, comment pouvez vous obtenir facilement la liste de tous les vecteurs de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

c) Créez une liste `LCOM` de tous les éléments non nuls du commutateur de J. (⚠ il y en a probablement pour 2 à 3 min, on testera d'abord que c'est correct avec liste plus courte)

d) Comment selectionner des éléments dans une liste. Par exemple, selectionnez les éléments de $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ du commutateur de J. Quel est le cardinal du stabilisateur de J sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? (Vérifiez le à la main)