Université de Paris 7 **TP04 : Déterminants** agreg 2010 (F.Han[1])

TP04 : Déterminants

Exercice I: Gauss-Bareiss ; Bordant, applications

(Cf H. Cohen, "A course in computationnal algebraic number theory" ; et dans xcas `aide>algorithmes>pivot`) Créer une matrice M formelle carrée de taille 3.

1) Comment afficher très simplement la première ligne de M ?

2) On considère une suite ($0 \le k < n$, l'indice k sera parfois noté en exposant) de matrices carrées de taille $n-k$: $M_k = (a_{i,j}^{(k)})_{k+1 \le i,j \le n}$ définie par la relation de récurence suivante : $(c_0 = 1)$

$$1 \le k < n,\ a_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{c_{k-1}} \begin{vmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,j}^{(k-1)} \\ a_{i,k}^{(k-1)} & a_{i,j}^{(k-1)} \end{vmatrix}, \quad c_k = a_{k,k}^{(k-1)}$$

Proposition : *Toutes les divisions par c_k sont exactes, et* $\det(M_k) = c_k^{n-k-1} \det(M_0)$. *En particulier* $\det(M_0) = c_n$.

a) Montrer la proposition pour une matrice formelle 3×3

b) A partir d'une matrice formelle $M_0 = A$ de taille 5, illustrer[2] le fait que :

$$a_{i,j}^{(k)} = \det(A_{u,v})_{u \in I, v \in J}$$

où $I = \{1, \ldots, k, i\}$, $J = \{1, \ldots, k, j\}$.

c) Montrer que $\det(M_k) = \frac{c_k^{n-k-1}}{c_{k-1}^{n-k}} \det(M_{k-1})$, et prouver la proposition.

d) En déduire une variante du pivot où l'on n'introduit pas de dénominateurs. (Gauss-Bareiss) Remarquer qu'elle est implémentée (Cf par exemple `pivot`). Illustrez l'importance de la simplification en affichant le produit des c_k pour une matrice de taille 10 à coefficients entiers entre -10 et 10

Exercice II: Tests ; Utilisation de pari

La méthode du pivot n'est pas forcément intéressante si la complexité des coefficients augmente trop.

1) a) Créer une matrice A de taille 4 à coefficients entiers entre -10 et 10. On pose `B :=A-x*identity(4) ;`. Réduire B en utilisant la commande `pivot` (et `normal` pour les simplifications) le long de la diagonale, puis recommencer avec l'autre diagonale. Commentez les coefficients.

b) Comparez avec le polynôme caractéristique de A. (`charpoly`, vous pouvez convertir un polynôme P en symbole avec `poly2symb(P,x) ;`

2) Créer une matrice A de taille k à coefficients entiers entre -10 et 10. On essayera d'abord avec $k = 30$ puis lorsque ca sera au point on affectera a k les valeurs 40 voire 50. Et poser : `B :=A-x*identity(k) ;`

3) Dans cette question nous allons illustrer les temps obtenus par les differentes méthodes avec un même logiciel. Il faut pour cela trouver dans la documentation de votre logiciel comment calculer un determinant par pivot, par gauss-bareiss, et comment calculer un polynome caracteristique par une methode specifique. Pour xcas nous passerons par pari et aussi par xcas. Pour utiliser une instruction de pari, soit on tape `pari(Mod(2,5)^10)`, soit on tape une fois par session : `pari() ;` puis l'instruction `pari_charpoly` ou `charpoly` s'il n'y a pas d'ambiguïté.

a) Etudier dans la documentation de xcas les différentes options de la fonction déterminant, et faites quelques tests.

b) Etudier dans la documentation de pari la façon dont est calculé le déterminant, et le polynôme caractéristique.

c) En utilisant `time()` et le calcul du déterminant par pari, calculez $\det(B)$ par pivot usuel et par Gauss-Bareiss, et le polynôme caractéristique par Faddeev via pari(Calcul de l'adjointe avec les traces). (Eventuellement étudier la doc xcas partie algorithmes). Attention, `charpoly` existe aussi sous xcas, pour être sur d'utiliser celui de pari, taper `pari_charpoly`

Exercice III:

1) Créer un exemple 4×4 pertinent (avec par exemple deux pivots nuls) pour expliquer le pivot de Gauss au Jury. Le faire étapes par étapes par produit de matrices. On pourra faire une fonction `T(i,j,s)` pour les transformations élémentaires.

2) Utiliser `LU` pour ce même système et expliquer le lien, mais aussi la différence.

3) a) Notons σ la transposition (k, l), et S la matrice associée à la transposition des k et l ièmes vecteurs de base. Etudier $S.T(i, j, s)$ et $T(i', j', s).S$.

[1] http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg

[2] Ne pas utiliser d'indice k ie ecraser les M intermédaires sauf A. Si l'on n'y arrive pas, le faire lorsque A est de taille 3

b) Comment obtenir la décompostion LU à partir du pivot ?