Université de Paris 7 (F.Han[1])

TP05 Polynôme caractéristique

agreg 2010

Exercice I: Polynôme caractéristique ; Mineurs diagonaux

Commencer par poser `n :=5;`, on le fera éventuellement augmenter après. Créer l'ensemble $I_n = \{1, \dots, n\}$. Comment retirer l'ensemble $\{2, 4\}$ de I_n.

1) En utilisant 2 fois `seq` créer une procédure `extr` de (A, I, J) qui retourne la matrice $A_{i\in I, j\in J}$

2) On condidère une matrice A, formelle de taille n, et la matrice diagonale formelle `d:=diag(seq(x[i],i=1..n));`

a) Etudier la documentation sur les dérivées, dérivées partielles, dérivées d'ordre supérieur et liste des dérivées partielles.

b) Comparer quelques mineurs diagonaux de taille 3 avec $\dfrac{\partial \det(A-d)}{\partial x[i]\partial x[j]}$ évalué en 0

c) On note $P = \det(A - x * I)$ le polynôme caractéristique de A. Quels sont ses coefficients en fonction de ses dérivées ?

d) Conclure[2] que le coefficient de x^{n-i} de P est $(-1)^{n-i}$ fois la somme des mineurs[3] diagonaux de taille i de A.

Exercice II: Polynôme Caractéristique[4] ; Th Cayley-Hamilton. Méthode de Faddeev

Soit A une matrice de taille n, I l'identité de taille n, et $M = X.I - A$. Nous allons déduire de la formule

$$^tM^{adj}.M = M.{}^tM^{adj} = \det(M).I \ (*)$$

une méthode pour calculer le polynôme caractéristique de A, et aussi une preuve du théorème de Cayley-Hamilton. (où M^{adj} est la matrice adjointe ou comatrice de M)

On note $\det(M) = P_A(X) = \sum_i a_i.X^i$ le polynôme caractéristique de A. On écrit $^tM^{adj} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i.X^i$ où B_i est une matrice de taille n. On déduit de la formule $(*)$:

$$a_i.I = B_{i-1} - B_i.A \ (**)$$

et $B_{n-1} = a_n.I = I$

On remarque de plus que $P_A'(X) = tr(M^{adj}) = \sum_i tr(B_i).X^i$. On obtient alors les B_i par récurrence décroissante à partir de $B_n = I$ grâce aux formules[5] :

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{tr(B_iA)}{i-n} \\ B_{i-1} = B_i.A + a_i.I \end{cases}$$

1) a) Calculer P_A et A^{adj} par cette méthode.

b) Vérifiez et faites quelques tests.

2) a) Comment obtient t'on le coefficient de x^3 de `3*x^4+2*x^3+y^3`. Comment créer une matrice ayant les mêmes dimensions que la matrice `A :=matrix(3,4,2);`

b) Créer une procédure `cf(P,k);` qui retourne le coefficient de x^k de l'élément $P \in \mathcal{M}_n[x]$.

⚠ Que devient votre procédure si x est déclaré comme un variable locale ?

3) Remarquer/illustrer sur un exemple de taille 3 (lignes par lignes, sans programmer) que l'on peut définir une division d'un élément $P(X)$ de $\mathcal{M}_n[X]$ par $X.I - A$ et que son reste est $P(A)$. On pourra par exemple prendre pour P un polynôme de degré 4 dont les coefficients sont des matrices de petits entiers aléatoires, et A une matrice 3×3 formelle.

⚠ P est un élément de $\mathcal{M}_n[X]$ qui n'est pas commutatif. On travaillera donc toujours du même coté, pour les divisions et pour donner un sens à $P(A)$. Plus précisément, on a le "théorème de Bezout généralisé" (Cf Gantmacher) : Le reste de la division à droite[6] de $P(x)$ par $x.I - A$ est $\sum p_i.A^i$ celui de la division à gauche est $\sum A^i.p_i$ où p_i sont les coefficients de P. ($p_i \in \mathcal{M}_n$). En déduire une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.[7]

[1] http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
[2] Pour une application de cette formule, TP graphes, nombre de triangles dans un graphe, ... prop 3.3, 3.6, 3.7
[3] il y en a C_n^i
[4] On pourra penser à ces méthodes pour la leçon sur les déterminants.
[5] prendre la trace dans $(**)$
[6] On entend par division à droite : $P = Q.(xI - A) + R$
[7] En effet $(*)$ montre que P est divisible par $X.I - A$