Université de Paris 7 | **TP13 Factorisation des Polynômes 1** | **agreg 2010**

(F.Han[1])

Exercice I: polynôme modulaires

1) ⚠ Essayez `rem(X^2+2*X+2,X^2+1);` et `rem(x^2+2*x+2,x^2+1)` et `rem([1,2,2],[1,0,1])`. Que se passe t'il, comment y remédier.

2) Polynômes et modulaires en mode maple. (En mode xcas on utilise % ce qui est impossible en mode maple car ce symbole est réservé pour les commentaires.

a) Première méthode pour le calcul modulaire : Les majuscules à la maple. On donne des polynômes à coefficients entiers, et l'on s'arrange pour que ce soit la fonction `mod` qui travaille. Retrouver le quotient et le pgcd des polynômes X^6-1 et $2X^3+5$ dans $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\,7[X]$ avec une syntaxe où les polynômes sont donnés avec des coefficients entiers et la variable `X`.

b) Autre méthode, plus naturelle : On crée des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, et ensuite on utilise les fonctions usuelles sur les polynômes. Pour remédier au problème du % en mode maple, Charger pari, et utilisez une fonction pari pour créer l'élément unité de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. (Cf documentation "conversion..."). Factoriser le polynôme $P = X^6 - 1$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\,[X]$. Quel est le reste de P par $2X^3 + 5$.

c) Essayer : `P:=X^6-1; Q1:=2*X^3+Mod(5,7);` et `Q2:=Mod(1,7)*Q1`. Comparer `quo(P,Q1,X)` et `quo(P,Q2,X)`.

Exercice II: Factorisation sans carrés

1) On considère des éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,[x]$ a, b, c, d, e premiers entre eux deux à deux, et sans facteurs multiples. On note $P = a.b^2.c^3.d^4.e^6$, et $Q = a.b.d$.

a) Que représente Q en fonction de P et P' dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,[x]$?

b) Illustrer en utilisant des variables formelles a, b, c, d, e comment obtenir a, b, d en partant de P et Q. (On effectuera des opérations en ligne de commande du type pgcd... et non un programme.)

c) Expliquer ensuite comment obtenir le polynôme $c.e^2$, puis comment en déduire c et e.

2) a) Créer une procédure `facto1(P,p)` donnant pour chaque i premier avec la caractéristique p le produit des facteurs irréductibles de multiplicité i dans P où P est un polynôme en `x`.

b) Trouver un bon polynôme pour tester `facto1`. (Par exemple 6 multiplicités différentes, dont deux multiples de p, les facteurs multiples n'étant pas tous irréductibles.)

3) Créer `facto2` en modifiant la procédure précedente pour obtenir aussi ceux de multplicité multiple de p.

[1] http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg