Université de Paris 7
2010 (F.Han[1])

TP15 Coniques ; Paramétrisation

agreg

Exercice I: "Révisions" (à faire à la main)

On considère le plan projectif suivant :

$$\mathbb{P}_2 = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim$$

où $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ si et seulement si il existe un réel non nul k tel que $(x, y, z) = k.(x', y', z')$. On considère de plus, le plan affine $\mathbb{R}^2$ vu comme sous ensemble de $\mathbb{P}_2$ par l'inclusion : $(x, y) \mapsto \overline{(x, y, 1)}$. On dire que $\mathbb{P}_2$ est le complété projectif du plan affine $\mathbb{R}^2$.

On considère les 3 droites affines d_1, d_2, d_3 d'équation respective : $x + 2y = 1$, $x + 2y = 2$, $2x - y = 1$. On note $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ leurs adhérences dans $\mathbb{P}_2$. Calculer les intersections $\bar{d}_i \cap \bar{d}_j$

Exercice II: Paramétrisation d'une conique projective.

1) Créer une conique $\mathcal{C}$ lisse de $\mathbb{P}_2$ au hasard passant par le point $(1, 1, 1)$.

2) Trouver une paramétrisation de la conique affine associée à $\mathcal{C}$ par des fractions rationnelles, et une paramétrisation de $\mathcal{C}$ par $\mathbb{P}_1$. Vérifier votre résultat.

3) a) Trouver une forme paramétrique de la tangente en un point général de $\mathcal{C}$.

b) Trouver son équation cartésienne.

c) Dessiner une partie affine de ces constructions. On pourra créer une fonction `paff` qui converti des coordonnées homogènes en l'affixe du point affine correspondant.

Exercice III: Génération ponctuelle des coniques

On notera $\mathbb{P}_2$ le complété projectif de $\mathbb{R}^2$. On note O_1 le point $(0, 0, 1)$ et O_2 le point $(0, 1, 0)$ (on pourra prévoir de pouvoir changer facilement O_2, pour ensuite essayer de le faire pour $O_2 = (1, 0, 1)$).

1) a) Donner deux façons de paramétrer par $\mathbb{P}_1$ les droites passant par un point. (L'une adaptée aux équations cartésienne, l'autre adaptée à une forme paramétrique)

b) On considère une homographie h du faisceau des droites passant par O_1 dans celui des droites passant par O_2. Modéliser cette homographie en utilisant des coefficients formels.[2]

2) a) Déterminer (sous forme paramétrique) l'intersection d'une droite et de son image par h. (On choisira bien la façon de paramétrer les droites passant par O_1, resp O_2)

b) Quels cas de matrice A inversible vous pose problème ?

3) En déduire l'équation homogène du lieu décrit par ce point ; Commentez.

a) Donner des solutions évidentes.

b) Que se passe t'il si $h(O_1O_2) = (O_1O_2)$? Donner une CNS pour que cette condition soit réalisée.

4) Recommencer avec $O_2 = (1, 0, 1)$, mais cette fois en n'utilisant que les équations cartésiennes pour décrire les deux pinceaux de droites.

5) a) Montrer que la conique est lisse si et seulement si $h(O_1O_2) \neq (O_1O_2)$.

b) En déduire le théorème de **génération ponctuelle des coniques**. (On n'oubliera pas le cas dégénéré).

6) Choisir une homographie, et faire un dessin, de la conique, d'une droite et de son image et du point d'intersection. (On pourra mettre un bouton pour le paramètre, on remarquera aussi que l'on peut déssiner les droites directement par équation cartésienne).

[1] http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg

[2] On pourra représenter le pinceau en O_1 sous forme cartésienne, et celui en O_2 sous forme paramétrique.