TP17 Cubiques

Exercice I: Cubique plane rationnelle

Une courbe plane d'équation $P(x,y)=0$ passant par $(1,1)$ est dite singulière en ce point si $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ s'annulent en ce point.

1) Remarquer que cette courbe est singulière en $(2,1)$ si et seulement si P est dans l'idéal $((x-2)^2,(x-2)(y-1),(y-1)^2)$. Créer un élément de degré 3 au hasard dans cet idéal, et essayer de dessiner la courbe d'équation $P(x,y)=0$.

2) Pour $(a,b)\neq(0,0)$, on note $d_{a,b}$ la droite passant par $(2,1)$ et le point $(a+2,b+1)$. Calculer l'intersection de la droite $d_{a,b}$ avec la courbe précédente. Montrer qu'il y a une racine double connue et un point résiduel noté $M_{a,b}$. Justifiez ces expressions en terme de racines d'un polynôme à une variable.

3) Dessiner cette courbe paramétrée par $\mathbb{P}_1$ dans le plan affine.

Exercice II: Surface cubique

On considère maintenant une surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation $P(x,y,z)=0$ où P est un polynôme de degré 3 nul en $(0,0,0)$, et de gradient dirigé selon Oz en ce point.

1) Créer une fonction `rl() ;` qui donne un polynôme aléatoire (non homogène avec de petits coefficients) de dégré 1 en x,y,z. Le produit `rl()*rl()` est il un polynôme général de degré 2 ? Comment peut on déduire de `rl()` un polynôme aléatoire de degré 2 en x,y,z ?

a) Choisir un tel polynôme P, trouver l'intersection C de cette surface avec son plan tangent en $(0,0,0)$ sous forme cartésienne.

b) Que peut on dire de C au point $(0,0,0)$? Paramétrer C privée de quelques points par des fractions rationnelles en un paramètre a. (comme dans l'exercice précédent). On notera M_a ce point.

2) Dans cette question, on se propose de réitérer cette construction afin de trouver une famille de dimension 2 de points rationnels sur la surface S. On pourra passer cette question dans un premier temps, et passer directements au problème des 27 droites.

a) Donner l'équation cartésienne de l'espace tangent à S en M_a.

b) Donner deux vecteurs du plan tangent en M_a qui sont en général indépendants : v_1, v_2.

c) Pour un paramètre formel b, trouver le point résiduel de l'intersection de la droite $(M_a, v_1+b.v_2)$. Vérifier que ce point est sur S.

3) Dans cette question, on souhaite trouver le nombre de droites incluses dans S.

a) Exprimer la condition pour que la droite passant par M_a et de vecteur directeur $(u,v,1)$ soit incluse dans S.

b) En déduire que (u,v) doit être solution d'un système de 3 équations $c0, c1, c2$ de degrés $1,2,3$ en u,v.

c) Résoudre celle de degré 1, et obtenir une équation en a nulle lorsque ce système a une solution. Factorisez ce polynôme et remarquez un facteur irréductible[2] de degré 27.

d) Comparez les autres facteurs, avec le coefficient de degré 1 de $c0$ utilisé, et aussi avec le dénominateur de M_a. On pourrait maintenant remarquer la droite $(M_a,(u,v,1))_{u,v}$ décrit toutes les droites passant par M_a sauf celles du plan $z=0$. On aurait donc du commencer par vérifier que le plan $z=0$ ne contenait pas de droites de S. De même, pour le plan à l'infini. Mais ces hypothèses sont légitimes pour S générale, et les droites incluses dans S sont bien données par le polynôme de degré 27 trouvé.

[1] http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg
[2] si votre cubique est générale