Exercice I: Quartiques rationnelles, élimination

1) Choisir 3 points distincts non alignés, et différents de $(0,0)$. On note $l_1, \ldots, l_3$ les équations des droites passant par deux de ces points. On considère l'idéal $I = (l_1.l_2, l_2.l_3, l_3.l_1)$. Quel est l'ensemble des points annulant tous les éléments de I ?

2) Décrire I^2. Déssiner une courbe dont l'équation est un élément assez général de degré 4 de I^2.

3) Trouver un élément irréductible P de I^2 de degré 4 nul en $(0,0)$.

4) Prendre 2 coniques C_1, C_2 passant par les 3 points choisis et $(0,0)$.

5) En projetant l'intersection de C_1 et $P = 0$ sur O_x et O_y, obtenir un point de la quartique $P = 0$ en général différent des 4 donnés.

6) En déduire une paramétrisation rationnelle de la quartique.

Exercice II: Polynôme minimal d'un algébrique. Cf [BPR] p 121

Soit θ un élément entier sur $\mathbb{Q}$, et a un élément de $\mathbb{Q}[\theta]$. Il s'agit de comprendre comment trouver le polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ connaissant a en fonction de θ et le polynôme minimal de θ sur $\mathbb{Q}$.

1) Choisir un polynôme P unitaire irreductible sur $\mathbb{Z}$ de degré n non ridicule. On note θ une racine de P. On considère l'élément $a = \dfrac{1}{d}(\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\theta^i)$. On notera H le polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} a_i.x^i)$. (Pour illustrer la méthode, on pourra laisser des variables formelles pour les a_i)

a) Trouver la matrice de la multiplication par a dans $\mathbb{Q}[\theta] = \mathbb{Q}[X]/(P)$.

b) Calculer son polynôme caractéristique, et comparez le au résultant en y de $P(y)$ avec $dx - H(y)$.

c) Montrer que $d^{\deg P}.Res_y(P(y), d.x - H(y))$ est une puissance du polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$. Illustrer ceci sur un exemple où ils ne sont pas égaux.

[1] http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg