Université de Paris 7
(F.Han[1])

TP20 ? Idéaux et géométrie

agreg 2010

Exercice I: idéaux,dualité, simplifications

1) Créer une liste des monômes de degré au plus 2 en u_1, u_2 où l'on ajoute 1. Idem avec ceux de degré au plus 3.

2) a) Prendre un polynôme P de degré 2 en x, y et nul en 5 points à coordonnées entières, l'un d'entre eux étant $(1, 1)$.

b) Calculer un vecteur directeur v de la tangente à $P = 0$ en $(1, 1)$.

c) Trouver un polynome Q de degré 3 passant par ces 5 points tels que les courbes affines d'équation $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ soient tangentes en $(1, 1)$. (On pourra commencer par en trouver un passant par ces 5 points ainsi que par $(1, 1) + t.v$).

d) Faire le dessin.

e) Rendre les polynômes P et Q homogènes en x, y, z.

f) Calculer le resultant en t de $P(ta_1 + a_2, tb_1+b_2, tc_1+c_2)$ et de $Q(ta_1+a_2, tb_1+b_2, tc_1+c_2)$. (on l'appelera R).

g) Comparez R avec le resultant en t de $P(a_1 + ta_2, b_1 + tb_2, c_1 + tc_2)$ et de $Q(a_1 + ta_2, b_1 + tb_2, c_1 + tc_2)$.

3) Elimination et base de Grobner.

a) On note A, B, C les mineurs 2×2 de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$. Comment calculer les mineurs de cette matrice ? Comment transformer une matrice en une liste ?

4) Expliquer comment transformer un polynôme en $a_1, \ldots, c_2$ en un polynôme en A, B, C lorsque c'est possible. (On se servira des instructions utilisant une base de grobner).

a) Obtenir R sous forme d'un polynôme en A, B, C.

b) Factoriser ce polynôme, et dessiner la courbe.

c) Expliquer la bijection (sur $\mathbb{C}$) entre l'intersection de P et Q et les facteurs irreductibles de R[2], et obtenir ainsi une définition de la notion de multiplicité d'intersection de 2 courbes planes en un point, et commenter le théorème de Bezout.

[1] http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg

[2] R est l'equation de la courbe duale du groupe de points