

5

-----Exercice-----
Famille generatrice de I comme Z module: les generateurs et leurs multiples par Isqrt(5)

6

M:=transpose(matrix([[2,0],[3,3],[0,2],[-15,3]]));

2, 3, 0, -15

0, 3, 2, 3

7

ismith(M);//Donc N(I)=2

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 & 0 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

8

ZI1:=seq(couleur(droite(-10,10)+i*j*sqrt(5),red+dash_line),j=-10..10);//les lignes du reseau.

Done

9

couleur(hidden_name); //On le met en global.

-2147483648

10

Zc1:=seq(couleur(droite(-10*i,10*i)+j,red+dash_line),j=-10..10);//les colonnes du reseau.

Done

11

Pour le reseau associe a I on cherche d'abord une base de I comme Z module, soit avec ismith soit de tete par ope

12

M:=matrix([[2,1],[0,1]]); //est une base de I

2, 1

0, 1

13

ZI2:=seq(couleur(droite(2*j-10-10*sqrt(5)*i,2*j+10+10*sqrt(5)*i),blue+dash_line),j=-10..10);;

Done

14

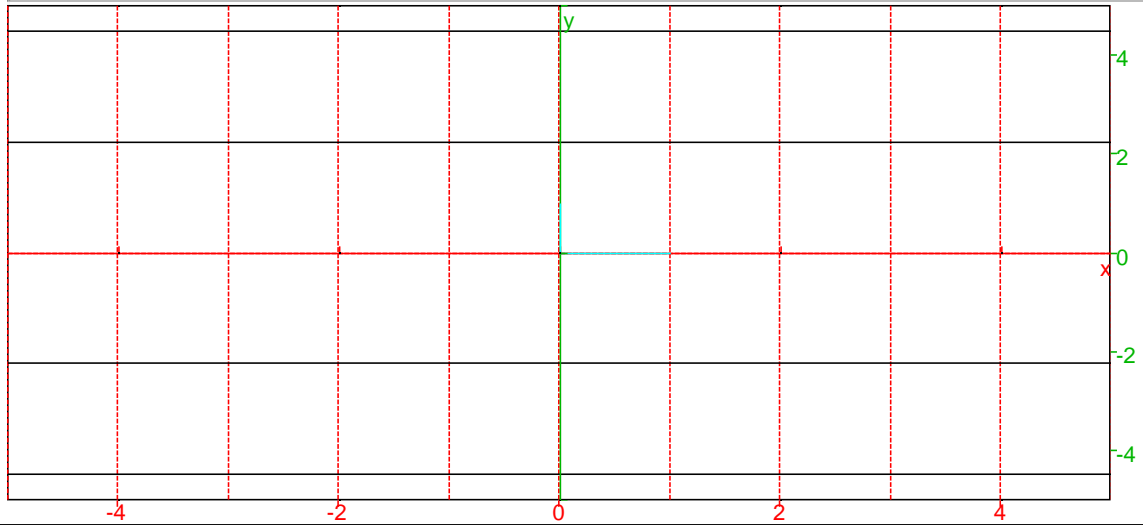
Zc2:=seq(couleur(droite(-10+j+j*sqrt(5)*i,10+j+j*sqrt(5)*i),blue+dash_line),j=-10..10);;

Done

15

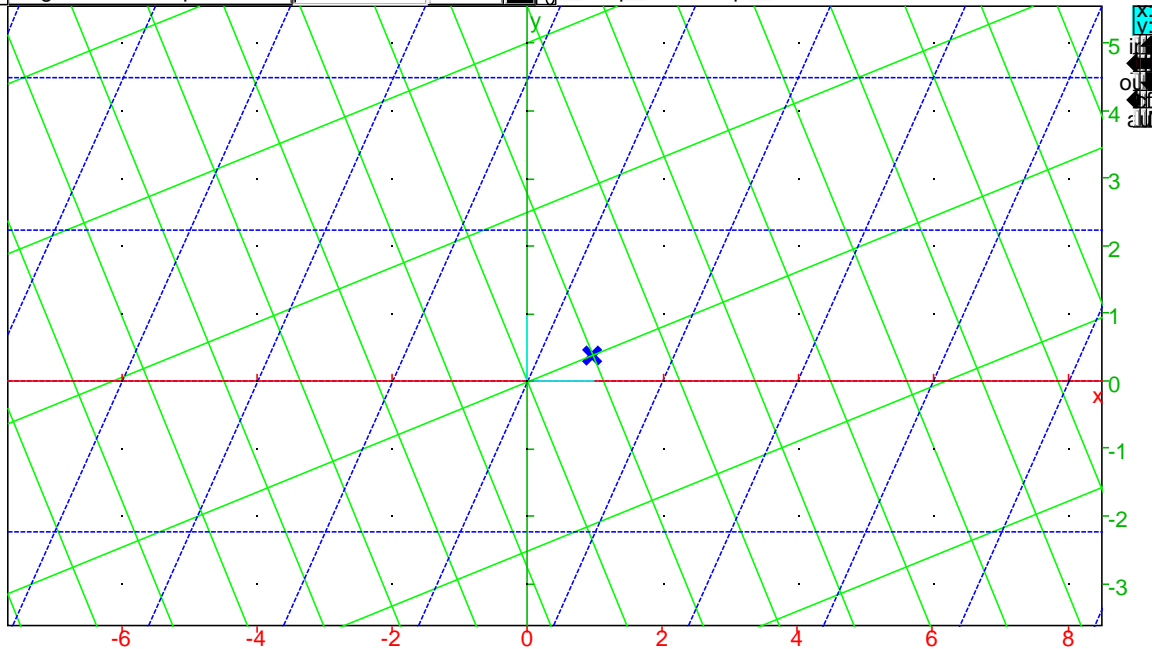
evalf(Zc1,ZI1,Zc2,ZI2);

16 Zisq5:=evalf(Zc1,ZI1)



17 Pour illustrer que i n'est pas principal, on l'affiche en bleu et on affiche en vert les multiples du réseau $Z(i.\text{sqrt}(5))$. Dans le menu mode on peut sélectionner le mode pointeur, et en déplaçant le point a on obtient tous les multiples de $Z(i.\text{sqrt}(5))$ par l'abscisse de a. (similitude). Les 2 réseaux ne coïncident jamais.

18 Fig Edit Graph Pointer Mode ☐ Step ☒ Landscape ☒



1 a:=point(1+i,'affichage'=(bleu+epaisseur_point_4))-0.038-0.6087*i

point(0.962,0.3913)

2 aZisq5:=affixe(a)*[Zisq5];

"Done"

3 couleur(aZisq5,vert);

Done

4 (Zc2,ZI2);

Done

5

6

19 Attention, le fait d'avoir dessiner des mailles est tendencieux, ça n'est pas par qu'un maillage n'est pas orthogonal qu'il n'en existe pas un autre orthogonal. Pour conclure correctement que $\$I\$$ n'est pas principal, il faut dire qu'on ne voit pas de rectangle d'aire 2 semblable au rectangle de cot'e 1 et sqrt(5)

20 gcd(6,3); //Attention, a priori pour lui c'est des polynomes, on a dela chance il les normalise bien.

3

21 gcd(x*(x+3),2*x);

x

22 igcd(4,6,8);

2

23 iquo(13,6);igcd(6,0);

(2, 6)

24 [a,b,d]:=igcdex(4,15); //pour un couple de bezout:

[4, -1, 1]

25 4*a+15*b-d;

0

26 delrows(matrix([[1,1],[2,3]]),0..0); //pour une colonne: delcols

[2, 3]

27 A:=diag([3,6,18,36]);B:=matrix(4,4,(ii,jj)->rand(7)-3);det(B);

// Success

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3, & 0, & 0, & 0 & -1, & -2, & 1, & -3 \\ 0, & 6, & 0, & 0 & 0, & 3, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 18, & 0 & 2, & 3, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 36 & -1, & 3, & 0, & 3 \end{array} \right), -27$$

28 ismith(A*B);

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} -1, & 0, & 0, & 0 & 3, & 0, & 0, & 0 & 0, & -1, & -2, & 9 \\ 2, & 1, & 0, & 0 & 0, & 6, & 0, & 0 & 0, & 0, & 0, & -1 \\ -12, & -6, & -1, & 0 & 0, & 0, & 18, & 0 & -1, & -1, & 1, & -8 \\ -108, & -54, & -10, & -1 & 0, & 0, & 0, & 972 & 0, & 0, & 1, & -5 \end{array} \right)$$

29 -----

30 Prog Edit Add 1 nxt OK (F9) Save

```
minval:=proc(A)
local m,u,v,i0,j0;
m:=0;u:=-1;v:=-1;
// NB: On retourne -1,-1 si A est nulle
for(i0:=0; i0<dim(A)[0];i0++){
for(j0:=0; j0<dim(A)[1];j0++){
if ((abs(A[i0,j0])>0) and ((m=0) or (abs(A[i0,j0])<m))) then m:=abs(A[i0,j0]);u:=i0;v:=
};
};
u,v;end proc;
```

```
(A)->
{ local m,u,v,i0,j0;
m:=0;
u:=-1;
v:=-1;
for (i0:=0;i0<((dim(A))[0]);i0++) {
for (j0:=0;j0<((dim(A))[1]);j0++) {
if (((abs(A[i0,j0])>0) && (((m=0) || (abs(A[i0,j0])<m)))) {
m:=abs(A[i0,j0]);
u:=i0;
v:=j0;
};
};
```

31

A:=matrix([[6, 0, 7, 9], [6, 8, 6, 9], [3, 2, 4, 6], [3, 2, 3, 3]]);

6, 0, 7, 9

6, 8, 6, 9

3, 2, 4, 6

3, 2, 3, 3

M

32

minval(A);

(2, 1)

M

33

(i0,j0):=minval(A);

(2, 1)

M

34

U:=identity(4);

1, 0, 0, 0

0, 1, 0, 0

0, 0, 1, 0

0, 0, 0, 1

M

35

normalement il faudrait faire bouger l dans {1..4} sauf j, c'est plus simple de ne pas mettre de test, et de corriger U[j,j] ensuite

36

undef

M

37

for l from 0 to 3 do U[j0,l]:=-iquo(A[i0,l],A[i0,j0]) od;;U[j0,j0]:=1::U;

(Done , Done ,

1, 0, 0, 0

-1, 1, -2, -3

0, 0, 1, 0

0, 0, 0, 1

)

M

38

A*U;

6, 0, 7, 9

-2, 8, -10, -15

1, 2, 0, 0

1, 2, -1, -3

M

39

40

Prog

Edit

Add

1

nxt

OK (F9)

Save

```

trans:=proc(A,i0,j0)
local n,U,V,l;
n:=dim(A)[0];
U:=identity(n);
V:=identity(n);
for l from 0 to n-1 do
V[l,i0]:=-iquo(A[l,j0],A[i0,j0]);
od;
//on corrige
V[i0,i0]:=1;
for l from 0 to n-1 do
U[j0,l]:=-iquo(A[i0,l],A[i0,j0]);
od;
//on corrige
U[j0,j0]:=1;
V*A*U;
end proc;

```

(A,i0,j0)->

```

n:=(dim(A))[0];
U:=identity(n);
V:=identity(n);
for (l:=0;l<=(n-1);l:=l+abs(1)) {
  V[l,i0]:=-i quo(A[l,i0],A[i0,i0]);
}

```

41 A:=matrix([[6, 1, 7, 9], [6, 8, 6, 9], [3, 1, 4, 6], [3, 2, 1, 3]]);

| |
|------------|
| 6, 1, 7, 9 |
| 6, 8, 6, 9 |
| 3, 1, 4, 6 |
| 3, 2, 1, 3 |

42 trans(A,3,1);

| |
|--------------|
| 5, 1, 7, 8 |
| -6, 0, 2, -3 |
| 2, 1, 4, 5 |
| 1, 2, 1, 1 |

43

44 Prog Edit Add | 1 | nxt | OK (F9) | Save |

```

Zequiv:=proc(A)
local k,n,l,B,i0,j0;
k:=0;
n:=(dim(A))[1];
l:=seq(0,k=1..n);
B:=A;
(i0,j0):=minval(B);
//minval retourne les coordonnees du minimum non nul,
//ou un couple impossible (Ex ici (-1,-1) en mode xcas) si B est nulle.
while((i0,j0)<>[-1,-1])and size(B)>1
{
// attention, ne pas oublier de declarer les variables locales
// dans trans pour eviter les melanges
B:=trans(B,i0,j0);
if [i0,j0]=[minval(B)]then
// on n'a que des zeros sur la ligne i et la colonne j sauf
// en (i,j) on sauve donc B[i0,j0] et on raye ligne et colonne.
l[k]:=B[i0,j0]; k:=k+1;
B:=delcols(B,j0..j0);
B:=delrows(B,i0..i0);
//le cas B de taille 1 pose probleme car on ne peut pas rayer
//une colonne puis une ligne
fi;
// ASTUCE: voici comment assigner 2 valeurs d'un coup.
(i0,j0):=minval(B);
};
// On a eventuellement change le signe du determinant
diag([seq(l[k],k=0..n-2),B[0,0]]);
end proc;

```

```

(A)->
{ local k,n,l,B,i0,j0;
k:=0;
n:=(dim(A))[1];
l:=seq(0,k=(1 .. n));
B:=A;
i0,j0:=minval(B);
while((((i0,j0))!=[-1,-1]) && ((size(B))>1)){
B:=trans(B,i0,j0);
if (((i0,j0))=[minval(B)]) {
l[k]:=B[i0,j0];
k:=k+1;
}
}
}

```

| | | | |
|----|--|---|---|
| 45 | <code>A:=matrix([[2,2,2],[6,12,6],[6,4,6]]); //Exemple:</code> | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ | M |
| 46 | <code>Zequiv(A);</code> | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | M |
| 47 | <code>A[2,2]:=12::A;</code> | $\left(\text{Done} , \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 6 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix} \right)$ | M |
| 48 | <code>Zequiv(A);</code> | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$ | M |
| 49 | On v\erifie que A et Zequiv(A) ont bien meme forme de smith: | | |
| 50 | <code>ismith(A)[1], ismith(Zequiv(A))[1];</code> | $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \right)$ | M |
| 51 | Attention, on n'obtient pas forcement les diviseurs elementaires, par exemple: | | |
| 52 | <code>A:=matrix([[4,0,0],[0,6,0],[0,0,8]]);</code> | $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ | M |
| 53 | <code>ismith(A)[1];</code> | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$ | M |
| 54 | <code>Zequiv(A);</code> | $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ | M |
| 55 | ca sera forc\ement le pgcd(d_1,...,d_n) car l'algorithme reste sur la premiere ligne. | | |
| 56 | <pre>f:=(ii,jj)-> if (ii-jj)*(ii-1)=0 then 1 else 0 fi; // Success // End defining f if (((ii-jj)*(ii-1))==0) { 1; } else { 0; } (ii, jj)> </pre> | | |
| 57 | <code>matrix(3,3,f);A:=matrix(3,3,f)*A;Zequiv(A);</code> | $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ | |

58 On recopie trans et Zequiv pour qu'ils ne travaillent que sur les colonnes

59 Prog Edit Add 1 nxt OK (F9) Save

```
transC:=proc(A,i0,j0)
//attention, si on ne met pas un local n, il modifiera la valeur de n dans ZequivC
local n,U,l;
n:=dim(A)[0];
U:=identity(n);
for l from 0 to n-1 do
U[j0,l]:=-iquo(A[i0,l],A[i0,j0]);
od;
//pour ne pas mettre de test dans la boucle precedente on n'ecarte pas l=i mais
```

// Success
// End defining transC

```
(A,i0,j0)->
{ local n,U,l;
n:=(dim(A))[0];
U:=identity(n);
for (l:=0;l<=(n-1);l:=l+abs(1)) {
U[j0,l]:=-iquo(A[i0,l],A[i0,j0]);
};
U[j0,j0]:=1;
A*U;
}
```

60

61 Prog Edit Add 1 nxt OK (F9) Save

```
ZequivC:=proc(A)
k:=0;
n:=dim(A)[0];
l:=seq(0,k=1..n);
B:=A;
(i0,j0):=minval(B);
while((i0,j0)<>[-1,-1])and size(B)>1
{
// attention, ne pas oublier de declarer les variables locales dans trans pour evit
B:=transC(B,i0,j0);
if [i0,j0]=[minval(B)]then
l[k]:=B[i0,j0]; k:=k+1;
B:=delcols(B,j0..j0);
B:=delrows(B,i0..i0);
fi;
// ASTUCE: voici comment assigner 2 valeurs d'un coup.
(i0,j0):=minval(B);
};
// On a eventuellement change le signe du determinant
diag([seq(l[k],k=0..n-2),B[0,0]]);
end proc;
```

```
(A)->
{ local NULL;
k:=0;
n:=(dim(A))[0];
l:=seq(0,k=(1..n));
B:=A;
i0,j0:=minval(B);
while((((i0,j0)!=[-1,-1]) && ((size(B))>1))) {
B:=transC(B,i0,j0);
if (((i0,j0)=[minval(B)])) {
l[k]:=B[i0,j0];
k:=k+1;
B:=delcols(B,i0..i0);
}
```

62

| 63 | Prog | Edit | Add | 1 | next | OK (F9) | Save | | | | | | | | | |
|--|---|------|-----|---|------|---------|------|------------------|---------------|----------------|--|---------|--|--|----------|--|
| <pre> elem:=proc(A) n:=dim(A)[1]; d:=Zequiv(A); L:=[]; for(i0:=0;i0< n-1;i0++) { T:=matrix(n-i0,n-i0,f); d:=ZequivC(T*d); L:=op(L),d[0,0]]; d:=delrows(delcols(d,0..0),0..0); }; [op(L),d[0,0]]; end proc; </pre> | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <pre> (A)-> { local NULL; n:=(dim(A))[1]; d:=Zequiv(A); L:=[]; for (i0:=0;i0<(n-1);i0++) { T:=matrix(n-i0,n-i0,f); d:=ZequivC(T*d); L:=op(L),d[0,0]]; d:=delrows(delcols(d,0 .. 0),0 .. 0); } } </pre> | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 64 | <pre>A:=matrix([[2,2,2],[6,12,6],[6,4,12]]);</pre> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr> <td>2, 2, 2</td> </tr> <tr> <td>6, 12, 6</td> </tr> <tr> <td>6, 4, 12</td> </tr> </table> | | | | | | | | 2, 2, 2 | 6, 12, 6 | 6, 4, 12 | | | | | | |
| 2, 2, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6, 12, 6 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6, 4, 12 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 65 | <pre>elem(A);smith(A)[1];</pre> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr> <td>([2, -2, 18],</td> <td>2, 0, 0</td> <td>)</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0, 2, 0</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>0, 0, 18</td> <td></td> </tr> </table> | | | | | | | | ([2, -2, 18], | 2, 0, 0 |) | | 0, 2, 0 | | | 0, 0, 18 | |
| ([2, -2, 18], | 2, 0, 0 |) | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0, 2, 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0, 0, 18 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 66 | <pre>elem(diag(4,6,16));smith(diag(4,6,16))[1];</pre> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr> <td>([4, 2, 48],</td> <td>2, 0, 0</td> <td>)</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0, 4, 0</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>0, 0, 48</td> <td></td> </tr> </table> | | | | | | | | ([4, 2, 48], | 2, 0, 0 |) | | 0, 4, 0 | | | 0, 0, 48 | |
| ([4, 2, 48], | 2, 0, 0 |) | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0, 4, 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0, 0, 48 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 67 | -----Exercise----- | | | | | | | | | | | | | | | |
| 68 | <pre> cardi:=A->if det(A)=0 then afficher("cardinal infini") else abs(det(A)) fi; </pre> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <pre> // Success // End defining cardi </pre> | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <pre> if (((det(A))==0)) { print("cardinal infini"); } else { abs(det(A)); A -> }; </pre> | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 69 | <pre>A:=matrix([[2*4,4,15*4,0],[8,12,18,36],[16,16,32,32],[32,32,32,32]]);</pre> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr> <td>8, 4, 60, 0</td> </tr> <tr> <td>8, 12, 18, 36</td> </tr> <tr> <td>16, 16, 32, 32</td> </tr> </table> | | | | | | | | 8, 4, 60, 0 | 8, 12, 18, 36 | 16, 16, 32, 32 | | | | | | |
| 8, 4, 60, 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8, 12, 18, 36 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16, 16, 32, 32 | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |
|----|---|---|
| 70 | <code>B:=ismith(A)[2];cardi(A);</code> | $\left(\begin{array}{cccc c} 16, & -96, & -21603, & 64170 & \\ 0, & 1, & 224, & -666 & \\ 1, & -6, & -1350, & 4010 & \\ -4, & 24, & 5401, & -16043 & \end{array} \right), 86016$ |
| 71 | M/N=M/image(A) il est donc isomorphe a M/B ou B=ismith(A) le cardinal est donc infini s'il y a un 0 sur la diagonale de B, sinon c'est le produit des termes diagonaux de B, donc aussi detB = det A (dans le cas d'une matrice carree) | |
| 72 | <code>abs(det(B)),abs(det(A)); //dans les 2 cas, c'est le cardinal.</code> | $(1, 86016)$ |
| 73 | <code>A:=matrix([[2*4,4,15*4,0],[8,12,18,36],[16,16,32,32],[24,28,50,68]]);</code> | $\begin{array}{cccc} 8, & 4, & 60, & 0 \\ 8, & 12, & 18, & 36 \\ 16, & 16, & 32, & 32 \\ 24, & 28, & 50, & 68 \end{array}$ |
| 74 | <code>ismith(A)[2]; cardi(A);</code> cardinal infini | $\left(\begin{array}{cccc c} 16, & -96, & 39, & -72 & \\ 0, & 1, & -8, & 114 & \\ 1, & -6, & 2, & 2 & \\ -4, & 24, & -7, & -23 & \end{array} \right), 1$ |
| 75 | <code>A:=matrix([[2*4,4,15*4,0,16],[8,12,18,36,28],[16,16,32,32,32],[24,28,50,68,68]]);</code> | $\begin{array}{ccccc} 8, & 4, & 60, & 0, & 16 \\ 8, & 12, & 18, & 36, & 28 \\ 16, & 16, & 32, & 32, & 32 \\ 24, & 28, & 50, & 68, & 68 \end{array}$ |
| 76 | <code>ismith(A)[2]; cardi(A);</code> cardinal infini | $\left(\begin{array}{ccccc c} 12, & -72, & 7947, & -6161, & 72 & \\ 0, & 1, & -110, & 46, & -114 & \\ 1, & -6, & 662, & -516, & -2 & \\ 0, & 0, & 0, & 8, & 23 & \\ -4, & 24, & -2649, & 2062, & 0 & \end{array} \right), 1$ |
| 77 | <code>v1:=[1,2];v2:=[-1,1];v3:=[0,2];</code> | $([1, 2], [-1, 1], [0, 2])$ |
| 78 | On fait quelques combinaisons lineaires au hasard, ca serait mieux de trouver une base (on le fera plus dans l'exercice) | |
| 79 | <code>seq(seq(couleur(point(ii*v1+j*v2+k*v3),blue+point_width_1+hidden_name),k=-5..5),j=-5..5),ii=-5..5);</code> | Done |
| 80 | <code>ismith(transpose(matrix([v1,v2,v3]))); //le reseau engendre est bien Z^2</code> | $\left(\begin{array}{cc cc cc} 1, & 0 & 1, & 0, & 0 & 0, & 1, & 2 \\ 1, & 1 & 0, & 1, & 0 & -1, & 1, & 2 \end{array} \right)$ |

81

v1:=[1,i]*v1;v2:=[1,i]*v2;v3:=[1,i]*v3; //notation complexe plus pratique pour les dessins.
(1+2*i , -1+i , 2*i)

M

82

d1:= [seq(droite(0,v1)+ii*v2,ii=-10..10)];
Done

M

83

d2:= [seq(droite(0,v2)+ii*v1,ii=-10..10)];
Done

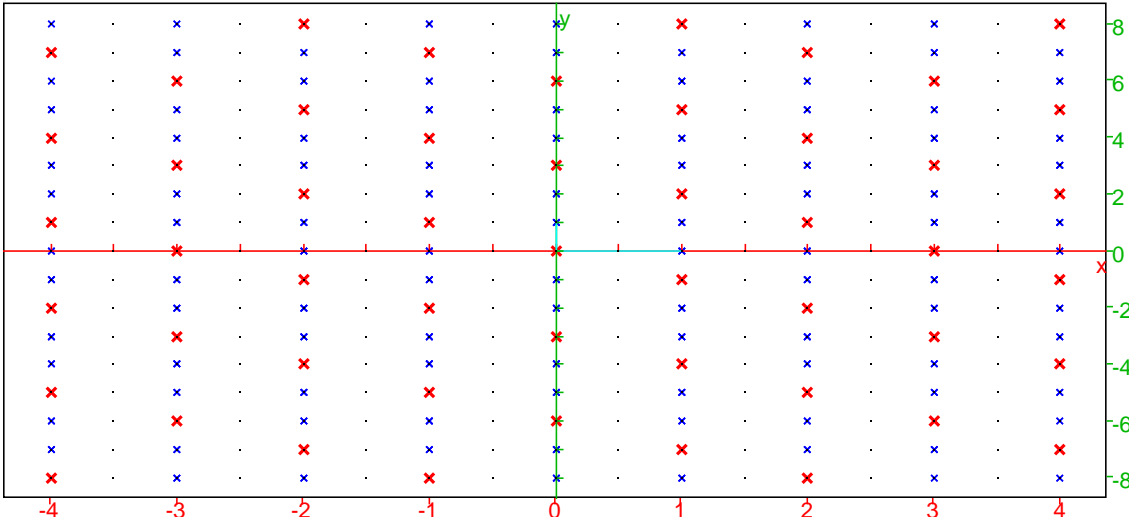
M

84

l2:= couleur(inter(d1,d2),red+point_width_2+hidden_name);
Done

M

85

(l,l2);// ca ne remplit pas tout


86

aucun des 3 determinants (v1,v2) (v1,v3) (v2,v3) n'est inversible dans Z, on ne peut donc pas en extraire une base.

87

-----Exercice-----

88

A:=matrix([[2*4,4,15*4,0],[8,12,18,36],[16,16,32,32],[32,32,32,32]]);

| | | | |
|-----|-----|-----|----|
| 8, | 4, | 60, | 0 |
| 8, | 12, | 18, | 36 |
| 16, | 16, | 32, | 32 |
| 32, | 32, | 32, | 32 |

M

89

(U,B,V):=ismith(A);

| | | | | | |
|-------|-------|------|------|--------------|------------------------|
| 0, | 1, | 0, | 0 | 2, 0, 0, 0 | 16, -96, -21603, 64170 |
| -57, | -50, | 0, | 26 | 0, 4, 0, 0 | 0, 1, 224, -666 |
| -12, | -24, | 43, | -11 | 0, 0, 16, 0 | 1, -6, -1350, 4010 |
| -184, | -352, | 608, | -149 | 0, 0, 0, 672 | -4, 24, 5401, -16043 |

M

90

(U*A*V-B);//verification.

| |
|------------|
| 0, 0, 0, 0 |
| 0, 0, 0, 0 |
| 0, 0, 0, 0 |
| 0, 0, 0, 0 |

M

91

(U^(-1)),(U^(-1)*B);//est une base de M resp N;

| | | | | | | | |
|------|-------|---------|------|------|--------|----------|---------|
| 94, | -281, | -15808, | 1118 | 188, | -1124, | -252928, | 751296 |
| 1, | 0, | 0, | 0 | 2, | 0, | 0, | 0 |
| 80, | -236, | -13277, | 939 | 160, | -944, | -212432, | 631008 |
| 208, | -616, | -34656, | 2451 | 416, | -2464, | -554496, | 1647072 |

