1 -------------------------------------EXERCICE---

2
```
purge(a,b,c,d,e,t);
```

3
```
P:=((1-a*t)*(1-b*t)*(1-c*t)*(1-d*t))^(-1);
```

$$((1-a\cdot t)\cdot(1-b\cdot t)\cdot(1-c\cdot t)\cdot(1-d\cdot t))^{-1}$$

4
```
s:=series(P,t=0,3);
```

$1+(a+b+c+d)\cdot t+(a^2+a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d+b^2+b\cdot c+b\cdot d+c^2+c\cdot d+d^2)\cdot t^2+$
$(a^3+a^2\cdot b+a^2\cdot c+a^2\cdot d+a\cdot b^2+a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot d+a\cdot c^2+a\cdot c\cdot d+a\cdot d^2+b^3+b^2\cdot c+b^2\cdot d+b\cdot c^2+b$

5 On constate que le coefficient de t^n est la somme de tous les monomes de degre n en les 4 variables a,b,c,d. Ces monomes sont en bijections avec les suites croissantes (au sens large) de n \'el\'ements de {1,2,3,4}.

6
```
coeff(s,t^3);
```

$a^3+a^2\cdot b+a^2\cdot c+a^2\cdot d+a\cdot b^2+a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot d+a\cdot c^2+a\cdot c\cdot d+a\cdot d^2+b^3+b^2\cdot c+b^2\cdot d+b\cdot c^2+b\cdot$

7 Pour r\'esoudre ce Pb on met des poids aux variables. Ex: a,d de degre 1, b: 3, c: 2, et f: 4. et l'on cherche les monomes de degres 208.

8

undef

9
```
P:=1/((1-a*t)*(1-b*t^3)*(1-c*t^2)*(1-d*t)*(1-f*t^4));
```

$$\frac{1}{(1-a\cdot t)\cdot(1-b\cdot t^3)\cdot(1-c\cdot t^2)\cdot(1-d\cdot t)\cdot(1-f\cdot t^4)}$$

10
```
s:=series(P,t=0,4):;
```

Done

11
```
coeff(s,t^4); //Ex on verifie bien que f a un poids de 4
```

$$a^4+a^3\cdot d+a^2\cdot d^2+a^2\cdot c+a\cdot d^3+a\cdot d\cdot c+a\cdot b+d^4+d^2\cdot c+d\cdot b+c^2+f$$

12
```
P:=1/((1-t)*(1-t^3)*(1-t^2)*(1-t)*(1-t^4));
```

$$\frac{1}{(1-t)\cdot(1-t^3)\cdot(1-t^2)\cdot(1-t)\cdot(1-t^4)}$$

13
```
s:=series(P,t=0,208):;
```

Done

14
```
coeff(s,t^208);
```

3605967

15 Pour calculer le coefficient de t^n, seuls les termes en 1/(1-t^i) pour i<n+1 du produit vont contribuer, on n'a donc pas besoin du produit infini pour n fixe

16
```
P:=n->mul(1/(1-t^j),j=1..n);
```

// Attention: t,j, declaree(s) comme variable(s) globale(s)
// End defining P

$$n \rightarrow \mathrm{mul}\left(\frac{1}{1-t^j},j=(1\,..\,n)\right)$$

17 On cherche donc le coefficient de t^50 dans:

18
```
series(P(50),t,0,50);
```

$1+t+2\cdot t^2+3\cdot t^3+5\cdot t^4+7\cdot t^5+11\cdot t^6+15\cdot t^7+22\cdot t^8+30\cdot t^9+42\cdot t^{10}+56\cdot t^{11}+77\cdot t^{12}+101\cdot t^{13}$
$297\cdot t^{17}+385\cdot t^{18}+490\cdot t^{19}+627\cdot t^{20}+792\cdot t^{21}+1002\cdot t^{22}+1255\cdot t^{23}+1575\cdot t^{24}+1958\cdot t^{25}+243$
$4565\cdot t^{29}+5604\cdot t^{30}+6842\cdot t^{31}+8349\cdot t^{32}+10143\cdot t^{33}+12310\cdot t^{34}+14883\cdot t^{35}+17977\cdot t^{36}+216$
$37338\cdot t^{40}+44583\cdot t^{41}+53174\cdot t^{42}+63261\cdot t^{43}+75175\cdot t^{44}+89134\cdot t^{45}+105558\cdot t^{46}+124754\cdot$

19
```
coeff(series(P(50),t,0,50),t^50);
```

20 l:=normal((a+b+c+d)^8);

$a^{8} + 8 \cdot a^{7} \cdot b + 8 \cdot a^{7} \cdot c + 8 \cdot a^{7} \cdot d + 28 \cdot a^{6} \cdot b^{2} + 56 \cdot a^{6} \cdot b \cdot c + 56 \cdot a^{6} \cdot b \cdot d + 28 \cdot a^{6} \cdot c^{2} + 56 \cdot a^{6} \cdot c \cdot d + 28$

$168 \cdot a^{5} \cdot b^{2} \cdot c + 168 \cdot a^{5} \cdot b^{2} \cdot d + 168 \cdot a^{5} \cdot b \cdot c^{2} + 336 \cdot a^{5} \cdot b \cdot c \cdot d + 168 \cdot a^{5} \cdot b \cdot d^{2} + 56 \cdot a^{5} \cdot c^{3} + 168 \cdot$

$70 \cdot a^{4} \cdot b^{4} + 280 \cdot a^{4} \cdot b^{3} \cdot c + 280 \cdot a^{4} \cdot b^{3} \cdot d + 420 \cdot a^{4} \cdot b^{2} \cdot c^{2} + 840 \cdot a^{4} \cdot b^{2} \cdot c \cdot d + 420 \cdot a^{4} \cdot b^{2} \cdot d^{2} + 280$

$840 \cdot a^{4} \cdot b \cdot c \cdot d^{2} + 280 \cdot a^{4} \cdot b \cdot d^{3} + 70 \cdot a^{4} \cdot c^{4} + 280 \cdot a^{4} \cdot c^{3} \cdot d + 420 \cdot a^{4} \cdot c^{2} \cdot d^{2} + 280 \cdot a^{4} \cdot c \cdot d^{3} + 70 \cdot$

$280 \cdot a^{3} \cdot b^{4} \cdot d + 560 \cdot a^{3} \cdot b^{3} \cdot c^{2} + 1120 \cdot a^{3} \cdot b^{3} \cdot c \cdot d + 560 \cdot a^{3} \cdot b^{3} \cdot d^{2} + 560 \cdot a^{3} \cdot b^{2} \cdot c^{3} + 1680 \cdot a^{3} \cdot b$

$560 \cdot a^{3} \cdot b^{2} \cdot d^{3} + 280 \cdot a^{3} \cdot b \cdot c^{4} + 1120 \cdot a^{3} \cdot b \cdot c^{3} \cdot d + 1680 \cdot a^{3} \cdot b \cdot c^{2} \cdot d^{2} + 1120 \cdot a^{3} \cdot b \cdot c \cdot d^{3} + 280 \cdot$

$280 \cdot a^{3} \cdot c^{4} \cdot d + 560 \cdot a^{3} \cdot c^{3} \cdot d^{2} + 560 \cdot a^{3} \cdot c^{2} \cdot d^{3} + 280 \cdot a^{3} \cdot c \cdot d^{4} + 56 \cdot a^{3} \cdot d^{5} + 28 \cdot a^{2} \cdot b^{6} + 168 \cdot a^{2} \cdot$

$420 \cdot a^{2} \cdot b^{4} \cdot c^{2} + 840 \cdot a^{2} \cdot b^{4} \cdot c \cdot d + 420 \cdot a^{2} \cdot b^{4} \cdot d^{2} + 560 \cdot a^{2} \cdot b^{3} \cdot c^{3} + 1680 \cdot a^{2} \cdot b^{3} \cdot c^{2} \cdot d + 1680 \cdot a$

$420 \cdot a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{4} + 1680 \cdot a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{3} \cdot d + 2520 \cdot a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2} \cdot d^{2} + 1680 \cdot a^{2} \cdot b^{2} \cdot c \cdot d^{3} + 420 \cdot a^{2} \cdot b^{2} \cdot d^{4} +$

$1680 \cdot a^{2} \cdot b \cdot c^{3} \cdot d^{2} + 1680 \cdot a^{2} \cdot b \cdot c^{2} \cdot d^{3} + 840 \cdot a^{2} \cdot b \cdot c \cdot d^{4} + 168 \cdot a^{2} \cdot b \cdot d^{5} + 28 \cdot a^{2} \cdot c^{6} + 168 \cdot a^{2} \cdot c$

$560 \cdot a^{2} \cdot c^{3} \cdot d^{3} + 420 \cdot a^{2} \cdot c^{2} \cdot d^{4} + 168 \cdot a^{2} \cdot c \cdot d^{5} + 28 \cdot a^{2} \cdot d^{6} + 8 \cdot a \cdot b^{7} + 56 \cdot a \cdot b^{6} \cdot c + 56 \cdot a \cdot b^{6} \cdot d +$

$168 \cdot a \cdot b^{5} \cdot d^{2} + 280 \cdot a \cdot b^{4} \cdot c^{3} + 840 \cdot a \cdot b^{4} \cdot c^{2} \cdot d + 840 \cdot a \cdot b^{4} \cdot c \cdot d^{2} + 280 \cdot a \cdot b^{4} \cdot d^{3} + 280 \cdot a \cdot b^{3} \cdot c^{4}$

$1680 \cdot a \cdot b^{3} \cdot c^{2} \cdot d^{2} + 1120 \cdot a \cdot b^{3} \cdot c \cdot d^{3} + 280 \cdot a \cdot b^{3} \cdot d^{4} + 168 \cdot a \cdot b^{2} \cdot c^{5} + 840 \cdot a \cdot b^{2} \cdot c^{4} \cdot d + 1680 \cdot a \cdot$

$840 \cdot a \cdot b^{2} \cdot c \cdot d^{4} + 168 \cdot a \cdot b^{2} \cdot d^{5} + 56 \cdot a \cdot b \cdot c^{6} + 336 \cdot a \cdot b \cdot c^{5} \cdot d + 840 \cdot a \cdot b \cdot c^{4} \cdot d^{2} + 1120 \cdot a \cdot b \cdot c^{3} \cdot$

$336 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d^{5} + 56 \cdot a \cdot b \cdot d^{6} + 8 \cdot a \cdot c^{7} + 56 \cdot a \cdot c^{6} \cdot d + 168 \cdot a \cdot c^{5} \cdot d^{2} + 280 \cdot a \cdot c^{4} \cdot d^{3} + 280 \cdot a \cdot c^{3} \cdot d$

$8 \cdot a \cdot d^{7} + b^{8} + 8 \cdot b^{7} \cdot c + 8 \cdot b^{7} \cdot d + 28 \cdot b^{6} \cdot c^{2} + 56 \cdot b^{6} \cdot c \cdot d + 28 \cdot b^{6} \cdot d^{2} + 56 \cdot b^{5} \cdot c^{3} + 168 \cdot b^{5} \cdot c^{2} \cdot d$

$70 \cdot b^{4} \cdot c^{4} + 280 \cdot b^{4} \cdot c^{3} \cdot d + 420 \cdot b^{4} \cdot c^{2} \cdot d^{2} + 280 \cdot b^{4} \cdot c \cdot d^{3} + 70 \cdot b^{4} \cdot d^{4} + 56 \cdot b^{3} \cdot c^{5} + 280 \cdot b^{3} \cdot c^{4} \cdot$

$280 \cdot b^{3} \cdot c \cdot d^{4} + 56 \cdot b^{3} \cdot d^{5} + 28 \cdot b^{2} \cdot c^{6} + 168 \cdot b^{2} \cdot c^{5} \cdot d + 420 \cdot b^{2} \cdot c^{4} \cdot d^{2} + 560 \cdot b^{2} \cdot c^{3} \cdot d^{3} + 420 \cdot b^{2} \cdot$

$8 \cdot b \cdot c^{7} + 56 \cdot b \cdot c^{6} \cdot d + 168 \cdot b \cdot c^{5} \cdot d^{2} + 280 \cdot b \cdot c^{4} \cdot d^{3} + 280 \cdot b \cdot c^{3} \cdot d^{4} + 168 \cdot b \cdot c^{2} \cdot d^{5} + 56 \cdot b \cdot c \cdot d^{6}$

M

21 coeff(l,[a,b,c,d],[3,2,1,2]);

1680

M

22 binomial(8,3)*binomial(5,2)*binomial(3,1);

1680

M

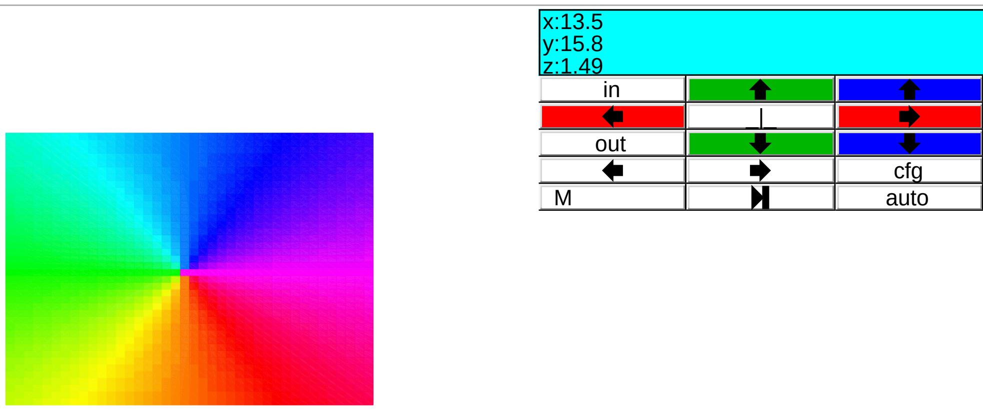
23 -------------------------------------EXERCICE--

24 z:=x+i*y;

$x + i \cdot y$

M

25 plotfunc(z,[x=-2..2,y=-2..2],xstep=0.1,ystep=0.1,affichage=rempli)



26 Les reels positifs sont en magenta, les negatifs en vert. On constate que le cercle trigonometrique est parcouru dans le sens: Rouge, Bleu, Vert.

27 Pour supprimer/modifier, il suffit de supprimer/editer la ligne correspondante

28 d(z):=z/abs(z);

// Interprete d
// Success compiling d

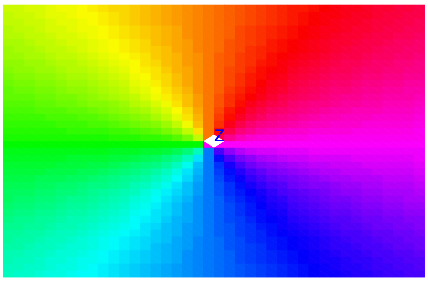
$z \rightarrow \frac{z}{\quad}$

29 On constate que les p\^oles et les z\'eros font apparaitre des points o\`u se rejoignent toutes les couleurs. Si l'on tourne dans le sens trigonometrique autour d'un tel point, on obtient un zero dans le cas Rouge-Bleu-Vert, et un pole dans le cas Rouge-Vert-Bleu. La multiplicite d'un pole ou d'un zero est obtenue avec le nombre de fois o\`u l'on parcourt le cercle chromatique.

30 plotfunc(d(1/z),[x=-2..2,y=-2..2],xstep=0.1,ystep=0.1,affichage=rempli)

x:7.82
y:19
z:1

in		
out		
		cfg
M		auto

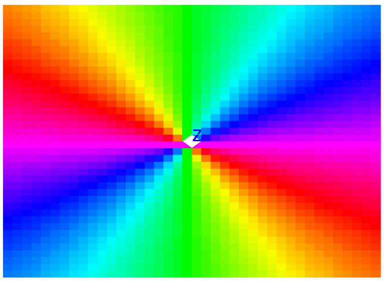


31 plotfunc(d(z^2),[x=-2..2,y=-2..2],xstep=0.1,ystep=0.1,affichage=rempli)

Evaluation time: 1.41

x:11.1
y:20.2
z:1

in		
out		
		cfg
M		auto

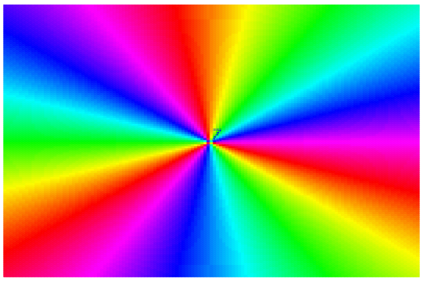


32 plotfunc(d(z^3),[x=-2..2,y=-2..2],xstep=0.03,ystep=0.03,affichage=rempli)

Evaluation time: 16.56

x:-0.924
y:22.3
z:1

in	⬆	⬆
⬅	_|_	➡
out	⬇	⬇
⬅	➡	cfg
M	▶|	auto



33 P(z):=4*z^8-4*z^6+12*z^5+5*z^4-12*z^3-4*z^2+3*z+1;

// Interprete P
// Success compiling P

$$z \to 4 \cdot z^{8} - 4 \cdot z^{6} + 12 \cdot z^{5} + 5 \cdot z^{4} - 12 \cdot z^{3} - 4 \cdot z^{2} + 3 \cdot z + 1$$

M

34 Q(z):=z^2+z+1;

// Interprete Q
// Success compiling Q

$$z \to z^{2} + z + 1$$

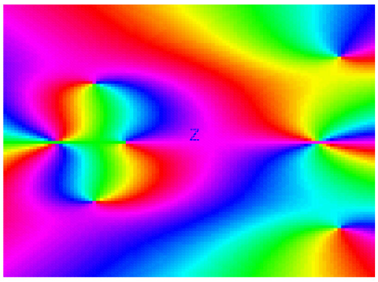
M

35 plotfunc(d(P(z)/Q(z)),[x=-1..1,y=-2..2],xstep=0.0002,y=0.0002,affichage=rempli);

Evaluation time: 12.54

x:0.795
y:16.3
z:1

in	⬆	⬆
⬅	_|_	➡
out	⬇	⬇
⬅	➡	cfg
M	▶|	auto



36 On promene la souris en observant l'affichage des coordonnees.
On obtient donc 2 zeros doubles sur l'axe reel proches de (+/-)sqrt(2)/2, et 2 zeros simples autour de 0.8 +/i 1.2i et un zero simple en -0.3
Il y a aussi 2 poles simples en j et son conjugue.

37 Ici c'est utile d'avoir cree des fonctions car z vaut x+iy, cSolve(P(z),z) ne marcherait donc pas.
Pour resoudre on peut tenter d'utiliser assume, mais il est forcement tres limite, et il ne faut pas trop lui en demander.

38 assume(real(zz)>-1 && real(zz)<1);

39 cSolve(P(zz),zz);//les zeros dans la bande -1<x<1

Warning! Algebraic extension not implemented yet for poly [1,0,0,3,1]

$\left[\sqrt{2},\ -(\sqrt{2}),\ 0.822576433319142+1.26031796110667*i,\ 0.822576433319142-1.26031796110667*i\right.$

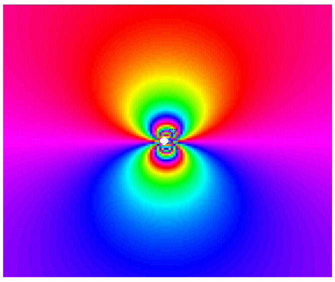
40 cSolve(Q(zz),zz);//les p\^oles.

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)*(-1+i*(\sqrt{3})),\ \left(\frac{1}{2}\right)*(-1-i*(\sqrt{3}))\right]$$

41 Une fonction meromorphe ne parcours qu'un nombre fini de fois le cercle chromatique. Pour exp(1/z) on voit une infinite arcs RVB enboites. Dans une representation ou le module serait plus visible, on pourrait aussi noter qu'il existe des chemins o\`u |exp(1/z)| tend vers 0 et d'autres o\`u ca tend vers +infini lorsque z->0 sur dans ces chemins. Ceci est impossible dans le ca meromorphe.

42 plotfunc(d(exp(1/z)),[x=-1..1,y=-1..1],xstep=0.0001,y=0.0001,affichage=rempli);

Evaluation time: 3.88



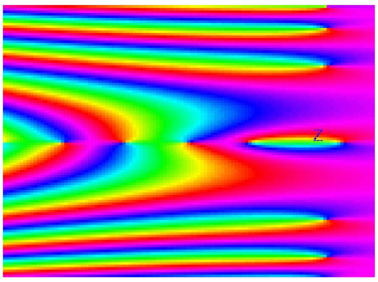
x:6.59
y:11.3
z:1

in		
out		
		cfg
M		auto

43 On voit des zeros simples en -2n pour n dans N*, un pole simple en 1.
Sur partie reelle =1/2 on voit le premier zero vers: 0.5+14.2i

44 plotfunc(d(Zeta(z)),[x=-10..2,y=-25..25],xstep=0.001,y=0.001,affichage=rempli);

Evaluation time: 39.52



x:29.7
y:281
z:1

in		
out		
		cfg
M		auto

45