1 restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0); #radians,pas de cmplx, pas de Sqrt

Warning: some commands like subs might change arguments order

2 --Exercice---courbes param\'etr\'ees--------------------------------

3 XT:=t*(t^2-1)^2;YT:=t^2+1;

$$\left(t\cdot(t^2-1)^2,\ t^2+1\right)$$

4 eq:=resultant(XT-x,YT-y,t);

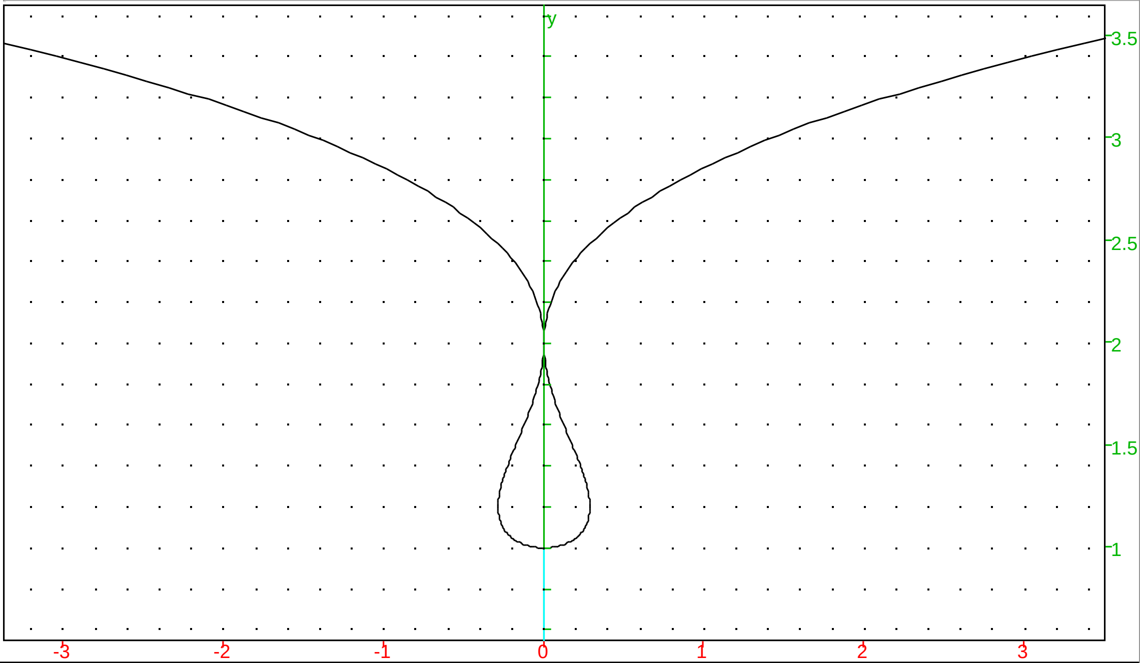
$$x^2-y^5+9\cdot y^4-32\cdot y^3+56\cdot y^2-48\cdot y+16$$

5 On remarque que si YT est reel, alors t^2 aussi, donc si XT est aussi reel,
XT/(t^2-1) aussi donc t aussi. donc si (XT,YT) est une solution reelle de
l'equation cartesienne trouvee, alors elle elle provient d'un parametre reel.

6 purge(x,y,u,t);

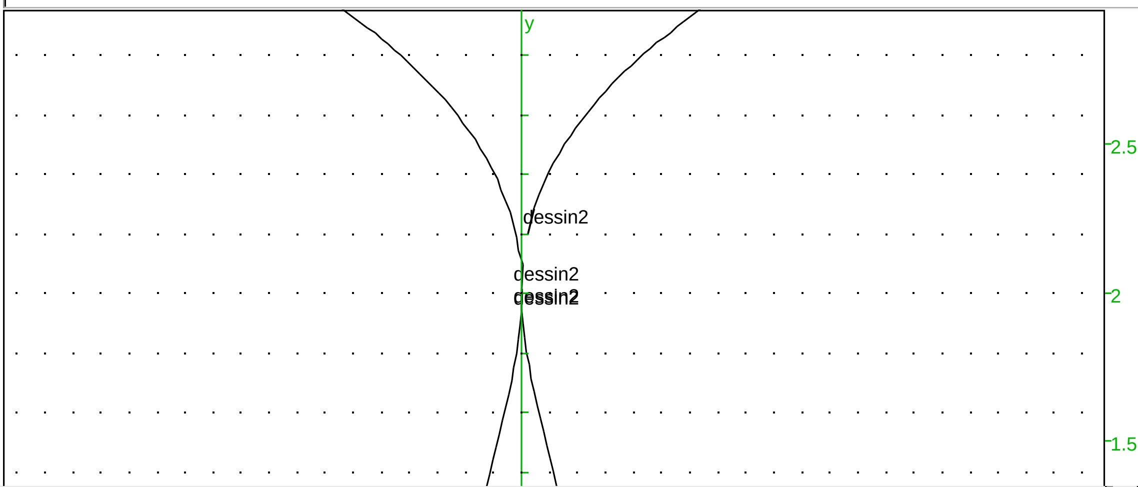
(No such variable x , No such variable y , No such variable u , No such variable t)

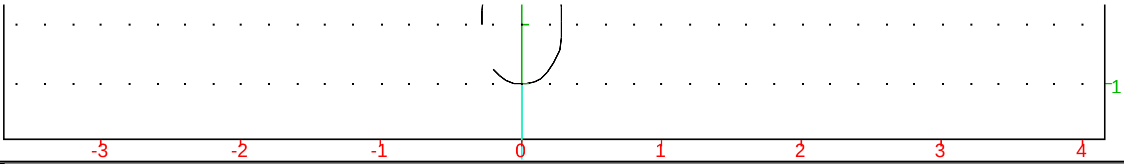
7 dessin1:=plotparam(XT+I*YT,t=-2..2);



8 dessin2:=implicitplot(eq=0,x=-5..5,y=-5..5,xstep=0.01,ystep=0.01);

Near [0,2] 16-48*(` implicitplot`-2)+96+1^2+56*(` implicitplot`-2)^2-224*(` implicitplot`-2)+224 roots [4.42857142857-0.346262846958*i
Near [0,2] 16-48*(` implicitplot`-2)+96+1^2+56*(` implicitplot`-2)^2-224*(` implicitplot`-2)+224 roots [4.42857142857-0.346262846958*i
Near [0,2] 16-48*(` implicitplot`-2)+96+1^2+56*(` implicitplot`-2)^2-224*(` implicitplot`-2)+224 roots [4.42857142857-0.346262846958*i
Singular points directions []
Bad branch, questionnable accuracy
Bad branch, questionnable accuracy
Bad branch, questionnable accuracy





9 Pour la fraction rationnelle trigonom\'etrique, on exprime x et y en fonction
d'un fraction rationnelle en u=tan(t/2), puis on elimine u avec le resultant.

10 F1:=normal(halftan((cos(t)+1)/(sin(t)+2)));//on exprime tout avec tan(t/2)

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{2}+\tan\left(\frac{t}{2}\right)+1}$$

11 F1u:=subst(F1,tan(t/2)=u);

$$\frac{1}{u^{2}+u+1}$$

12 F2:=normal(halftan((sin(t)^3)/(sin(t)-3)));

$$\frac{-8\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{3}}{3\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{6}-2\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{5}+9\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{4}-4\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{3}+9\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)^{2}-2\times\tan\left(\frac{t}{2}\right)+3}$$

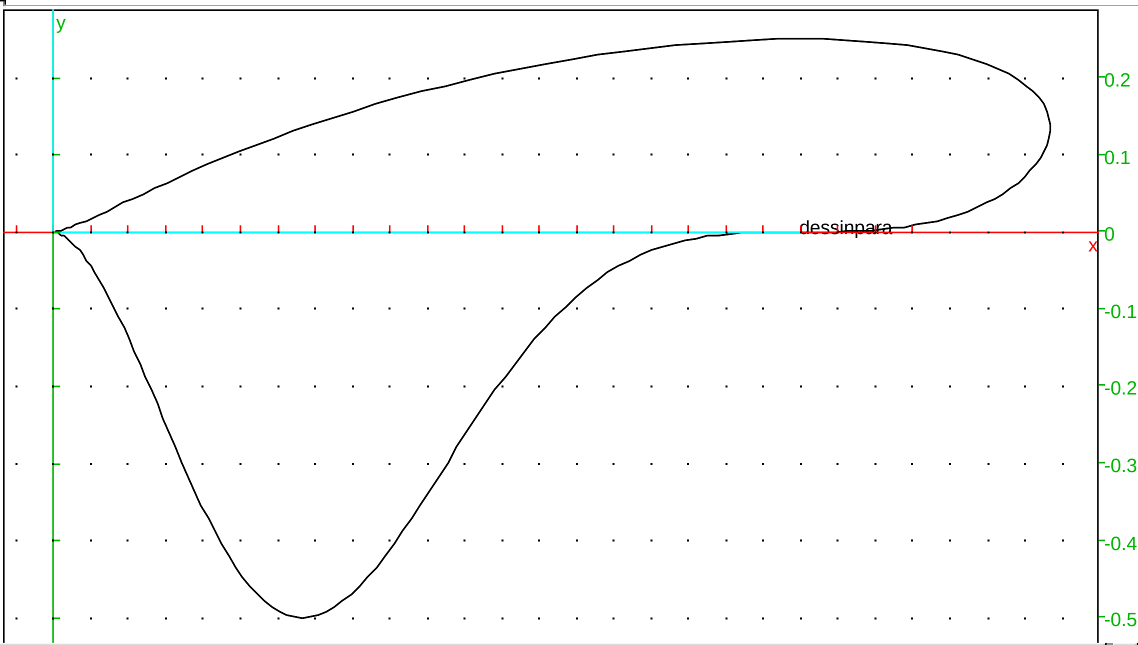
13 F2u:=subst(F2,tan(t/2)=u);

$$\frac{-8\times u^{3}}{3\times u^{6}-2\times u^{5}+9\times u^{4}-4\times u^{3}+9\times u^{2}-2\times u+3}$$

14 eq:=resultant(denom(F1u)*x-numer(F1u),denom(F2u)*y-numer(F2u),u);

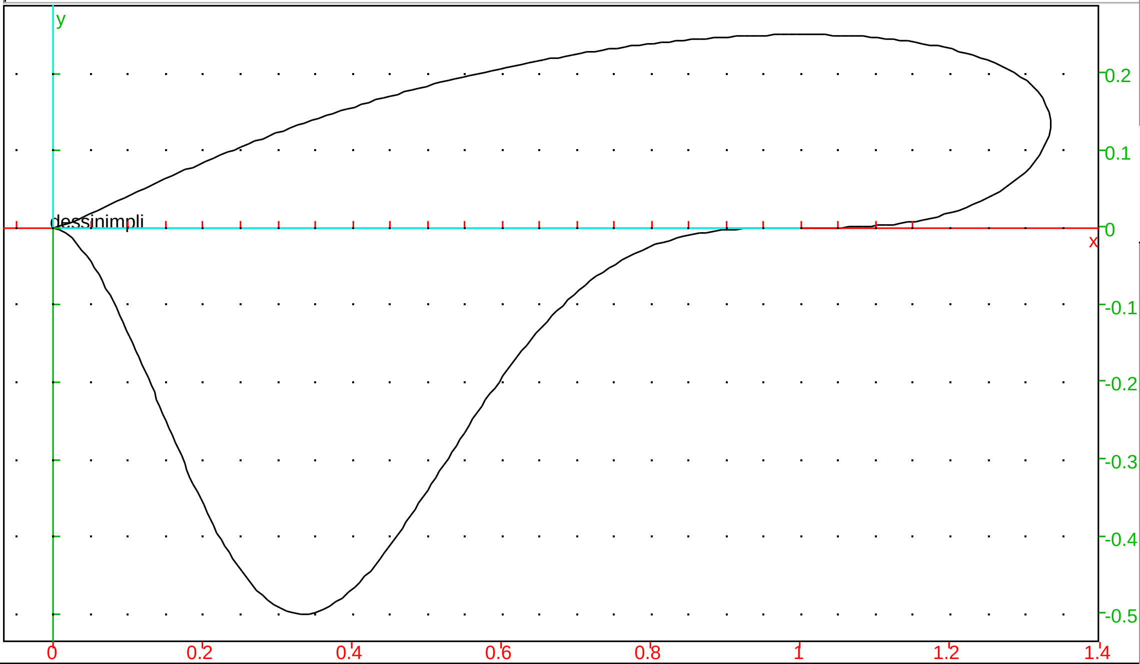
6 2 6 6 5 2 5 5 4 2 4 4 3 2 3

15 dessinpara:=plotparam([F1,F2],t=-2*Pi..2*Pi);



16 dessinimpli:=implicitplot(eq,x=0..2,y=-1..1,ystep=0.01);//on ajuste un peu pour que implicitplot s'en sorte.

Warning! Algebraic extension not implemented yet for poly [39605,2472,-8960,1536]
Near [0,0] 9*` implicitplot`^2 roots [0.0]
Singular points directions [[0,0,0.0,0.00666666666667-0.0017192485112*i],[0,0,0.0,0.00666666666667+0.00120989182827*i]]
Bad branch, questionnable accuracy



17 ---------------------------Exercice---

18 l:=5^(1/3)+sqrt(5);

$$5^{\frac{1}{3}}+\sqrt{5}$$

19 P:=resultant((x-y)^3-5,y^2-5,y);

$$x^{6}-15*x^{4}-10*x^{3}+75*x^{2}-150*x-100$$

20 if(simplify(unapply(P,x)(l))==0) then print("c'est bon") fi;

c'est bon

1

21

22 Prog Edit Ajouter 1 nxt OK (F9) Save

```
pmsomme:=proc(A,B)
local fA,fB;
fA:=unapply(A,x)(x-y);
fB:=unapply(B,x)(y);
```

// Attention: x,y, declaree(s) comme variable(s) globale(s)
// End defining pmsomme

```
proc(A,B)
  local fA,fB;
  fA:=(unapply(A,x))(x-y);
  fB:=(unapply(B,x))(y);
  resultant(fA,fB,y);

end;
```

23 l:=5^(1/3)+sqrt(2)+5^(1/7)+1+2^(1/5);

$$5^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2}+5^{\frac{1}{7}}+1+2^{\frac{1}{5}}$$

24 P1:=pmsomme(x^3-5,x^2-2);

25 P2:=pmsomme(P1,x^7-5);

$x^{42} -42 * x^{40} -70 * x^{39} + 840 * x^{38} + 2100 * x^{37} -8365 * x^{36} -27750 * x^{35} + 51660 * x^{34} + 154000 * x^{33} -352968 * x^{32} -203280$
$45424890 * x^{26} -592401390 * x^{25} + 116581115 * x^{24} + 7150984470 * x^{23} -6216969591 * x^{22} -25383954480 * x^{21} -31019$
$-1363705430955 * x^{16} -986702247790 * x^{15} + 4184223793245 * x^{14} + 4658701493670 * x^{13} -7244840035027 * x^{12} -$
$25214604415455 * x^{8} -10015389847980 * x^{7} -20486058629855 * x^{6} -43790480063610 * x^{5} + 30515194177020 * x^{4}$

26 P3:=pmsomme(P2,(x-1)^5-2);

$x^{210} -210 * x^{209} + 21735 * x^{208} -1478190 * x^{207} + 74312070 * x^{206} -2945491206 * x^{205} + 95883507125 * x^{204} -26366432$
$23939293006675767 * x^{200} -395401407944677050 * x^{199} + 5902669181195240125 * x^{198} -80217335401558260150$
$121522644700374963816750 * x^{194} -1199011802642514074364150 * x^{193} + 11042945086929768050787875 * x$
$-5919906248895503534965256200 * x^{189} + 42893276803080023388308293725 * x^{188} -295037312574715424347885$
$-12079694981387273419930246778814 * x^{185} + 72289824428880645462456495614490 * x^{184} -415112733047825$
$-12203211620431523289922927991211180 * x^{181} + 62730264557506316971328067635228274 * x^{180} -31197191$
$1503507751068634660538002344266162490 * x^{178} -7032374875328838673319485620687396680 * x^{177} + 3196$
$-141405606342648070024978605767294707638 * x^{175} + 609403254745607820243237619411188833775 * x^{174}$
$10512707826189214661250495022578330240600 * x^{172} -42165398093073159287549375842438120157500 * x$
$-635174682910399607362759436825349599805900 * x^{169} + 2387891683685131059968818879942999437647575$
$31645467573341785141901527074859282197901275 * x^{166} -111322307785811086796250290087800246144034000$
$-1270883723853811274540869256613085385910816000 * x^{163} + 4087943673142074070570063420019590332555042$
$-12602931815195133400534305278427683665445193600 * x^{161} + 367752724756208148994529051128780268254425$
$-99322755305563291851743892348023801719272824090 * x^{159} + 236693958556646185811833918549056324180219$
$-431735521429091937406169696977996713284034312660 * x^{157} + 16370519382277658305646238765025027268660$
$3774532909867359510763142605091499258607503236796 * x^{155} -26498078938429524061370506810922623832586$
$130876351889348265843946381919833411204279969790210 * x^{153} -558649177880278215253694208747138847534$
$2185669229094599063062851743089564849014598443607500 * x^{151} -8023107754537014542550474121298003289$
$27887515380696297022493737025773647364626781552115550 * x^{149} -918806321189562660812857011020716611$
$285189689573608087897354514328198967954038276768186700 * x^{147} -82089833785550795059244073441424621$
$2114688858984469182560439905103109666966332767196286560 * x^{145} -4428819348833809442902725225939580$
$4660744807650497919032554674905162211771094605295342650 * x^{143} + 206300783801814572461127723504292$
$-189506143310807265218054030702983034422675350726238701950 * x^{141} + 100639349344601689559856304394$
$-4423137357765699258729457518465114348400034921884172529150 * x^{139} + 17468197814066366602427674894$
$-64022428415189857203299003197047674270546140701630544096650 * x^{137} + 221267583138399683690454222$
$-727742621725258016030471285869938921250667602230977523255528 * x^{135} + 22912822131888168240222644$
133

27 nops(factor(P3));

211

28 simplify(unapply(P3,x)(l)); // ca doit etre nul

Evaluation time: 1.63

0

29 ---

Exercice: Contour apparent

30 B:=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2-4;

$(x -1)^{2} + (y -2)^{2} + (z -4)^{2} -4$

31 M:=[x,y,0]+t*[1,0,2];//un rayon de soleil

$[x + t, \ y, \ 2 * t]$

32 On cherche les (x,y) tels que le rayon du soleil M coupe B avec une racine double en t. C'est le discriminant.

33 P1:=unapply(B,x,y,z)(op(M));

$(x + t -1)^{2} + (y -2)^{2} + (2 * t -4)^{2} -4$

34 P2:=diff(P1,t);

$2 * (x + t -1) + 4 * (2 * t -4)$

35 EQ:=resultant(P1,P2,t);

$80 * x^{2} + 160 * x + 100 * y^{2} -400 * y + 80$

36 D1:=implicitplot(B,[x=-5..5,y=-5..5,z=0..8],display=magenta+rempli):;

Ellipsoid of center [1.0,2.0,4.0]

Done

37 D3:=plan(z=0,couleur=yellow):;

Done

38 Pn a trouve l'equation de la projection. C'est aussi l'equation du cylindre dans le repere (i,j,[1,0,2]). On trouve donc l'equation du cylindre dans (i,j,k). Si P est la matrice de passage on a:

39 P:=[[1,0,1],[0,1,0],[0,0,2]];

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$$

40 les coordonnes dans (i,j,k) en fonction de celles dans (i,j,[1,0,2])

41 P^(-1)*[x,y,z];

$$\left[\frac{z}{-2}+x,\ y,\ \frac{z}{2}\right]$$

42 CYL:=unapply(EQ,x)(x-z/2); // l'equation du cylindre

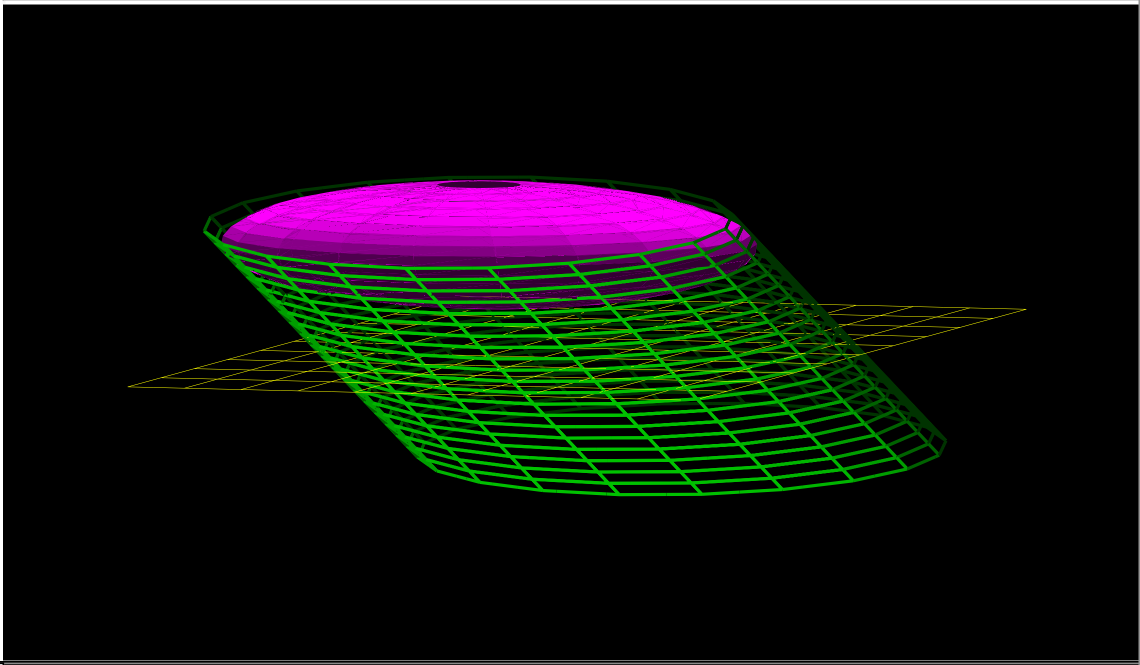
$$80*\left(x-\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2+160*\left(x-\left(\frac{z}{2}\right)\right)+100*y^2-400*y+80$$

43 D2:=implicitplot(CYL,[x=-5..5,y=-5..5,z=0..10],display=green+line_width_3):;

Elliptic cylinder around [-0.8,2.0,0.4]

Done

44 D3,D1,D2;



45 ---

46

47 ---------------------------------------Exercice---Intersections et projection-------------------------------------

48 purge(x,y);

(No such variable x , No such variable y)

49 C1:=x*y-4;C2:=y^2-(x-3)*(x^2-16);

$$\left(x*y-4,\ y^2-(x-3)*(x^2-16)\right)$$

50 d1:=implicitplot(C1,x=-7..7,y=-8..8,color=red+line_width_2):;

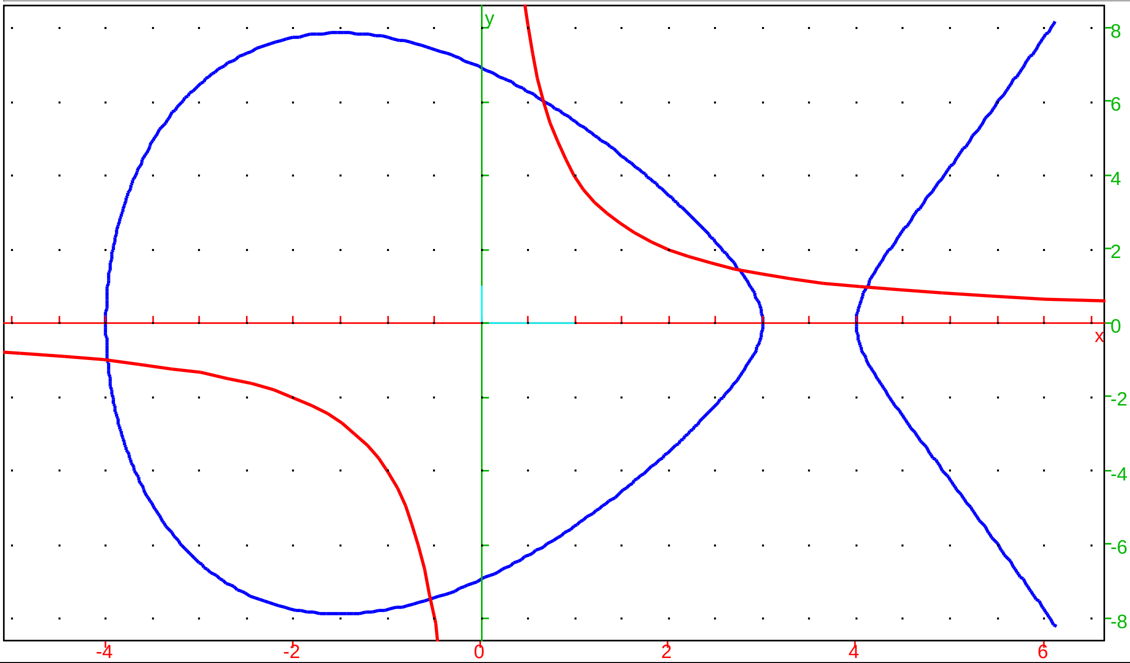
Hyperbola of center (0,0)

Done

51 d2:=implicitplot(C2,x=-7..7,y=-8..8,color=blue+line_width_2,xstep=0.01,ystep=0.01):;

Done

52 (d2,d1);



53 eqx:=resultant(C1,C2,y); //On elimine y

$-x^5 + 3*x^4 + 16*x^3 - 48*x^2 + 16$

54 Astuce: pour ne pas passer en flottants via le menu deroulant, on lui donne une extention de corps sous forme d'un flottant. Mais il vaut mieux utiliser approx.

55 factor(eqx,1.1); // on obtient 5 points reels.

-1.0 *(x -4.105876927)*(x -2.749235551)*(x -0.6633796231)*(x+ 0.5365997443)*(x+ 3.981892356)

56 factor(approx(eqx)); // on obtient 5 points reels.

-(x -4.105876927)*(x -2.749235551)*(x -0.6633796231)*(x+ 0.5365997443)*(x+ 3.981892356)

57 c'est de degre 5 car le centre de projection (0,1,0) est solution.

58 on parametre la droite passant par les points [1,1] et [0,y] grace au vecteur directeur (-1,y-1):

59 M:=[1,1]+t*[-1,y-1];

[1 -t, 1+ (y -1)*t]

60 P1:=unapply(C1,x,y)(op(M));

(1 -t)*(1+ (y -1)*t) -4

61 P2:=unapply(C2,x,y)(op(M));

$(1+ (y-1)*t)^2 - (1-t-3)*((1-t)^2 - 16)$

62 On cherche l'equation de la projection de l'intersection depuis (1,1) sur Oy. Cette equation est encore de degre 5. Pourtant (1,1) n'est pas solution. Mais on a pris toutes les droites passant par (1,1) sauf (x=1) (ie x=z en projectif) mais le point (0,1,0) est solution de C1 inter C2, et il est sur cette droite. On a donc perdu la ou les solutions qui sont sur la droite retir\'ee.

63 resultant(P1,P2,t);

$14*y^5 - 193*y^4 - 604*y^3 + 2064*y^2 - 1728*y + 448$

64 resultant(subs(y=-2*x+1,C1),subs(y=-2*x+1,C2),x); //il n'est pas nul

-29421

65 gcd((subs(y=-2*x+1,C1),subs(y=-2*x+1,C2),x)); //autre methode le pgcd est constant.

1

66 On a donc verifie que la droite d'equation y=-2x+1 (ie la parallele a y=-2x passant par (1,1) ne rencontrait pas C1 inter C2 meme sur un corps algebriquement clos.

67 NB: A=(1,1) n'est pas sur la droite y=-2x. Bt=(t,-2t) eq param de la droite
(ABt): x=1+l(t-1),y:=1+l(-2t-1)

68 C1t:=subs(x=1+l*(t-1),y=1+l*(-2*t-1),C1);

$$(1+(5^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2}+5^{\frac{1}{7}}+1+2^{\frac{1}{5}})*(t-1))*(1+(5^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2}+5^{\frac{1}{7}}+1+2^{\frac{1}{5}})*(-2*t-1))-4$$

69 C2t:=subs(x=1+l*(t-1),y=1+l*(-2*t-1),C2);

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ 2 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ 2

70 la projection est donn\'ee par les points de coordonn\'ee (t,-2t) o\`u t racine
de. De plus, on a verifie que la parallele a la droite y=-2x passant par (1,1)
ne contenait aucune solutions de C1 inter C2, ca ne pose donc pas de problemes
de l'avoir retiree.

71 p2:=resultant(C1t,C2t,l);

$$-14699*t^{6}+25716*t^{5}+1779*t^{4}-15116*t^{3}-624*t^{2}+2496*t+448$$

72 car le point (1,-2) est l'intersection de y=-2x avec la droite passant par (1,1)
et le point a l'infini de Oy. Mais le point a l'infini de Oy etait bien dans
C1 inter C2.

73 sol:=solve(approx(p2),t);//pour basculer en flottants on fait approx.

(-0.5062528649 , -0.3273837129 , -0.2487685675 , 0.6001057333 , 1.0 , 1.231806181)

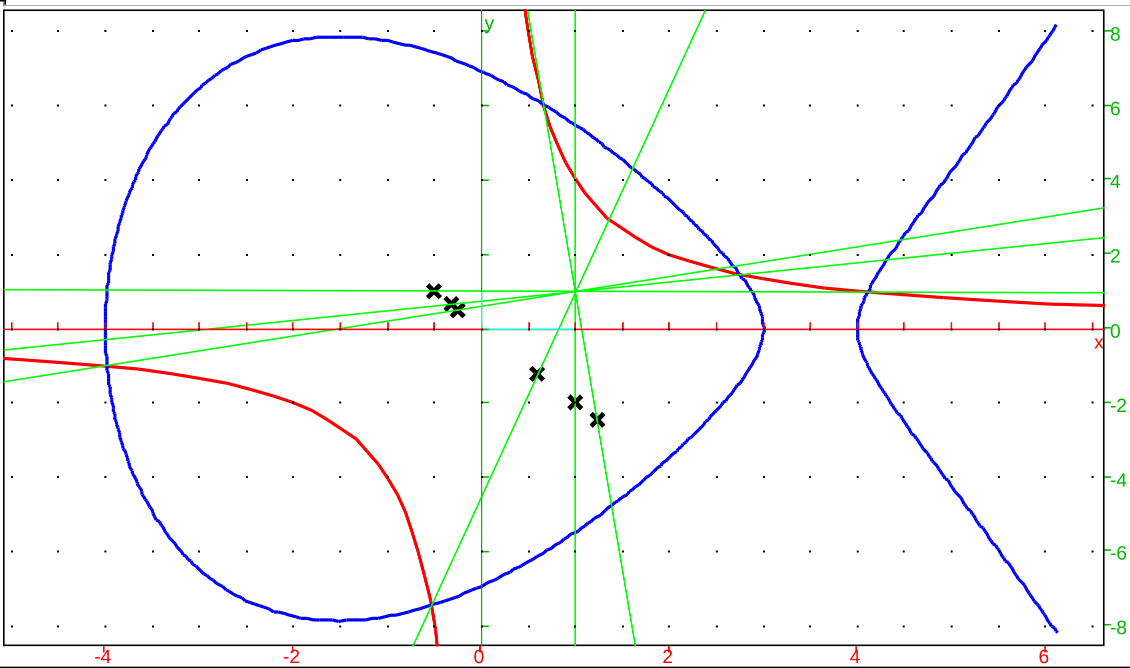
74 pi1:=seq(point(sol[i]-2*I*sol[i],color=black+point_width_3),i=1..6):; //les points sur la droite y=-2x

Done

75 di1:=seq((droite(1+I,pi1[i],color=green)),i=1..6):; // les 6 droites:

Done

76 (d1,d2,pi1,di1); //NB un point d'intersection de C1 et C2 est a l'infini.



77 purge(x,y);

(No such variable x , No such variable y)

78 C1:=(x-2)^2+y^2-4;

$$(x-2)^{2}+y^{2}-4$$

79 C2:=y^2-(x-3)*(x^2-16);

$$y^{2}-(x-3)*(x^{2}-16)$$

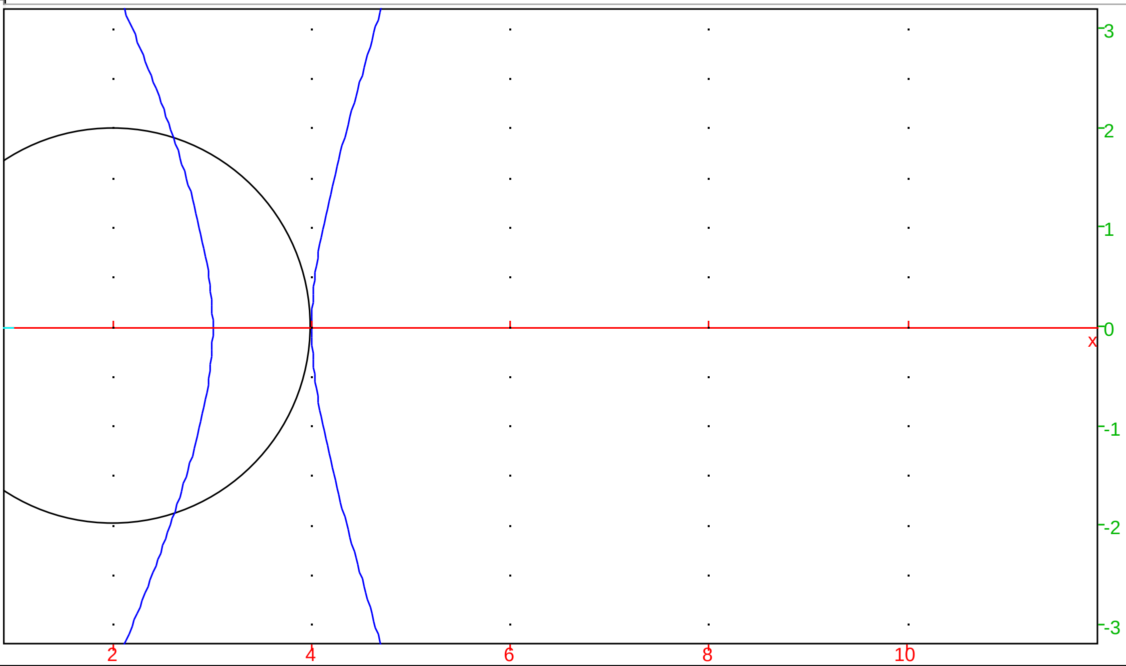
80 d1:=implicitplot(C1,x=-1..5,y=-3..3,color=red):;

Done

81 d2:=implicitplot(C2,x=-5..8,y=-8..8,color=blue):;

Done

82 (d1,d2);



83 eqx:=resultant(C1,C2,y); //On elimine y

$$x^{6}-4*x^{5}-36*x^{4}+176*x^{3}+208*x^{2}-1920*x+2304$$

84 factor(eqx,1.1); // on obtient 5 points reels.

2

85 factor(eqx); //On voit qu'il faut introduire le discriminant.

$$(x-4)^{2}*(x^{2}+2*x-12)^{2}$$

86 factor(eqx,sqrt(13));

$$(x-4)^{2}*(x+(-1)*(\sqrt{13})+1)^{2}*(x+\sqrt{13}+1)^{2}$$

87 eqred:=gcd(eqx,diff(eqx,x));

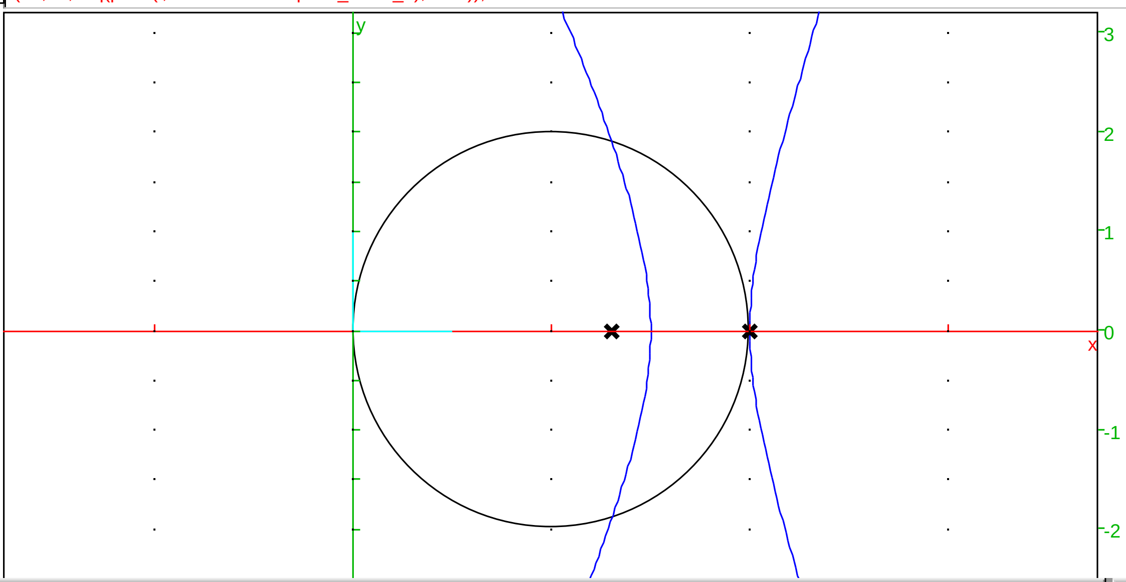
$$x^{3}-2*x^{2}-20*x+48$$

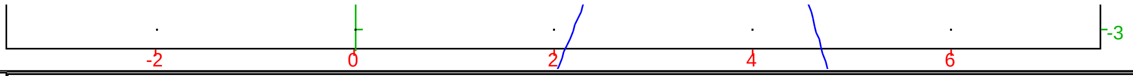
88 rac:=[solve(approx(eqred),x)];

[-4.605551275 , 2.605551275 , 4.0]

89 On constate qu'il y a un point qui ne semble pas correspondre a une projection d'un point d'instersection. Nous allons l'interpr\'eter maintenant.

90 (d1,d2,seq(point(i,couleur=black+point_width_3),i=rac));





91 solx:=[solve(eqred,x)];

$$\left[-(\sqrt{13})-1,\ \sqrt{13}-1,\ 4\right]$$

92 soly:=seq(gcd(subs(x=solx[i],C1),subs(x=solx[i],C2)),i=1..3);

$$(y^{2}+6*(\sqrt{13})+18,\ y^{2}+-6*(\sqrt{13})+18,\ y^{2})$$

93 les ordonn\'ees des points d'abscisse solx[i] sont:

94 seq(cSolve(soly[i],y),i=1..3);

$$((I*(\sqrt{6*(\sqrt{13})+18}),\ (-I)*(\sqrt{6*(\sqrt{13})+18})),\ (-(\sqrt{6*(\sqrt{13})-18}),\ \sqrt{6*(\sqrt{13})-18}),\ 0)$$

95 On constate que pour solx[3] les ordonn\'ees des points de C1 inter
C2 ayant cette abscisse sont complexes conjuguees bien que solx[3]
soit reel ce qui explique pourquoi le dessin ne nous donnait que 4 points.

96 ---------------------------------------Exercice---Intersections de quadriques-------------------------------------

97 purge(u);

No such variable u

98 S1:=x^2+1/4*y^2+1/9*z^2-1

$$x^{2}+\frac{y^{2}}{4}+\frac{z^{2}}{9}-1$$

99 S2:=x^2+y^2+z^2-u;

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}-u$$

100 projy:=resultant(S1,S2,y);

$$729*x^{4}-270*x^{2}*z^{2}+486*x^{2}*u-1944*x^{2}+25*z^{4}-90*z^{2}*u+360*z^{2}+81*u^{2}-648*u+1296$$

101 factor(projy);//c'est une conique double a cause de la symetrie en y.

$$(9*u-5*z^{2}+27*x^{2}-36)^{2}$$

102 coni:=factors(projy)[2][1,1];

$$27*x^{2}-5*z^{2}+9*u-36$$

103 Pour retrouver les coniques degeneree, on cree la forme quadratique associee en
homog\'en\'eisant son \'equation, puis on trouve la matrice de la forme quadratique
avec les d\'eriv\'ees partielles. on regarde ensuite son son determinant.

104 q:=normal(x[3]^2*unapply(coni,x,y)(x[1]/x[3],x[2]/x[3]));

$$9*u*(x[3])^{2}-5*z^{2}*(x[3])^{2}+27*(x[1])^{2}-36*(x[3])^{2}$$

105 Mq:=matrix(3,3,(i,j)->diff(q,x[i],x[j]));//le determinant est bien nul pour u=4.

// Attention: q,x, declaree(s) comme variable(s) globale(s)

$$\begin{bmatrix} 54, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 18*u-10*z^{2}-72 \end{bmatrix}$$

106 purge(u);

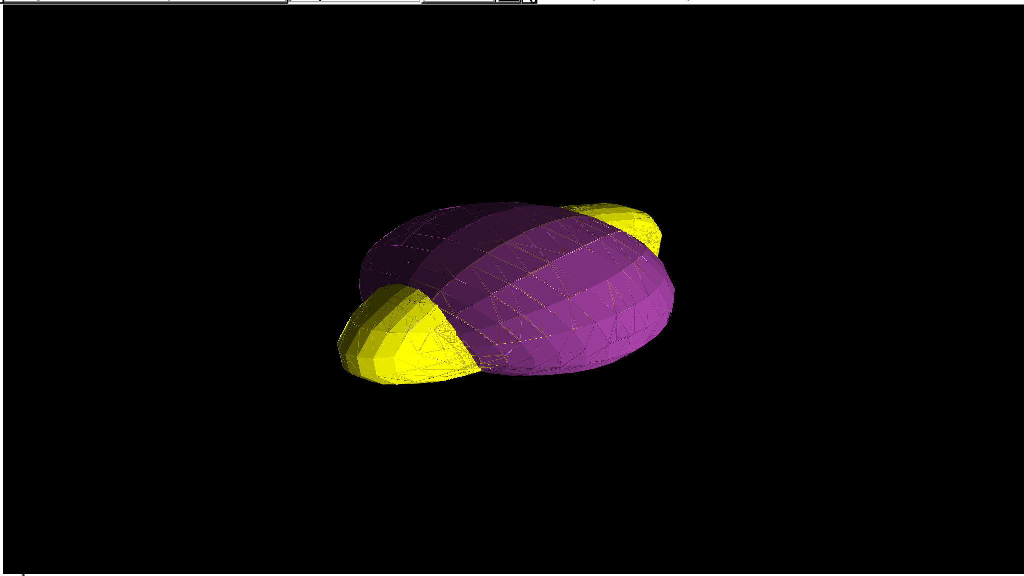
No such variable u

107 DS1:=implicitplot(S1,x,y,z,couleur=13+rempli):;

Ellipsoid of center [0.0,0.0,0.0]

Done

109 Fig Edit Graphe Repere Mode Ste Landscap



x:-2.34
y:-7.13
in out cfg M auto 2.32 u

Done

2 u:=element([1 .. 9,2.32,0.08])

parameter([u,1,9,2.32,0.08])

3 DS2:=implicitplot(S2,x,y,z,couleur=jaune+rempli);

Variable u should be purged
Ellipsoid of center [0.0,0.0,0.0]

Done

4

110 purge(t);

No such variable t

111 u:=3;

3

112 M:=[5,5,10]+t*[x-5,y-5,0-10];//la droite passant par [5,5,10] et [x,y,0]

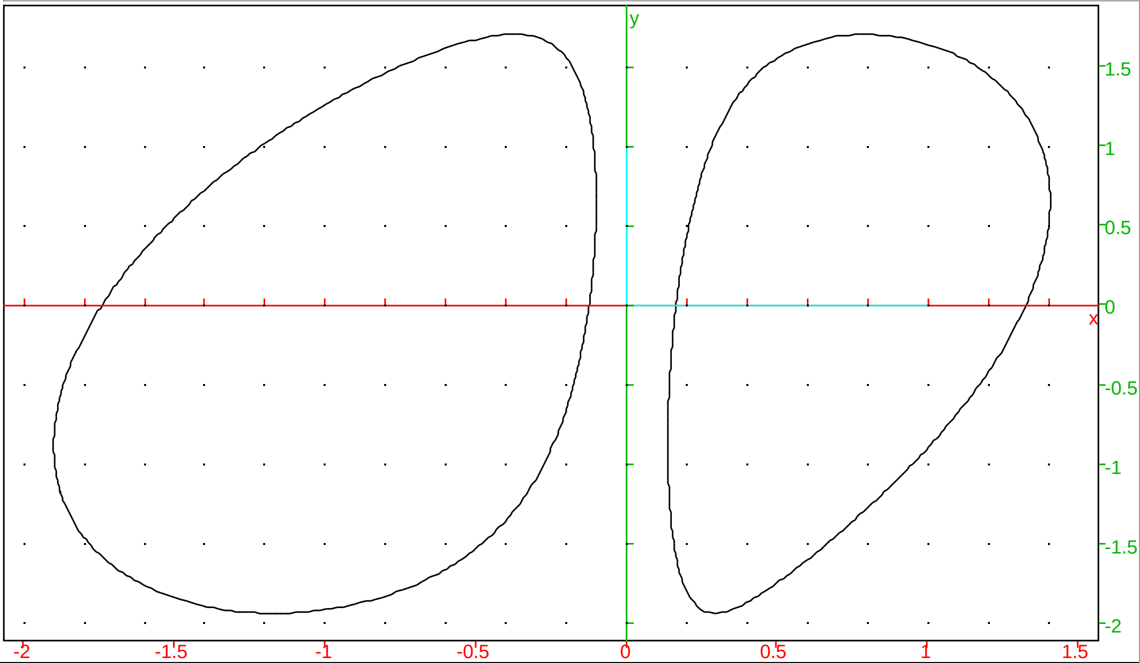
$[5+(x-5)*t,\ 5+(y-5)*t,\ 10-10*t]$

113 proj2:=resultant(unapply(S1,x,y,z)(op(M)),unapply(S2,x,y,z)(op(M)),t);

$14462809*x^4-10268100*x^3*y+5476320*x^3+9453704*x^2*y^2+206460*x^2*y-33894150*x^2-448200*x*y^3-11$

114 La projection pour u=3 depuis (5,5,10) a brise la sym\'etrie que l'on avait en projetant selon Oz sur les solutions du systeme. On n'a donc plus le carr\'e d'une conique. D'autre part, bien que l'on voie 2 nappes r\'eelles, elles ne ressemblent pas du tout a des coniques ni a des droites, l'equation de degre 4 est donc irreductible sur les complexes

115 implicitplot(proj2,x=-2..2,y=-2..2,xstep=0.01);



116 on cherche une quadrique degeneree contenant S3 inter S4

117

undef

118 S3:=7*x^2+4*x*y+4*x*z+5*y^2+12*y*z+6*z^2+1

$$7 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x \cdot z + 5 \cdot y^2 + 12 \cdot y \cdot z + 6 \cdot z^2 + 1$$

119 S4:=-x^2-2*x*y-2*x*z-4*y^2-6*y*z-3*z^2-2

$$-x^2 - 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x \cdot z - 4 \cdot y^2 - 6 \cdot y \cdot z - 3 \cdot z^2 - 2$$

120 S3h:=normal(x[4]^2*unapply(S3,x,y,z)(x[1]/x[4],x[2]/x[4],x[3]/x[4]));

$$7 \cdot (x[1])^2 + 4 \cdot (x[1]) \cdot (x[2]) + 4 \cdot (x[1]) \cdot (x[3]) + 5 \cdot (x[2])^2 + 12 \cdot (x[2]) \cdot (x[3]) + 6 \cdot (x[3])^2 + (x[4])^2$$

121 S4h:=normal(x[4]^2*unapply(S4,x,y,z)(x[1]/x[4],x[2]/x[4],x[3]/x[4]));

$$-(x[1])^2 - 2 \cdot (x[1]) \cdot (x[2]) - 2 \cdot (x[1]) \cdot (x[3]) - 4 \cdot (x[2])^2 - 6 \cdot (x[2]) \cdot (x[3]) - 3 \cdot (x[3])^2 - 2 \cdot (x[4])^2$$

122 MS3:=matrix(4,4,(i,j)->diff(S3h,x[i],x[j]));

// Attention: S3h,x, declaree(s) comme variable(s) globale(s)

$$\begin{bmatrix} 14, & 4, & 4, & 0 \\ 4, & 10, & 12, & 0 \\ 4, & 12, & 12, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$$

123 MS4:=matrix(4,4,(i,j)->diff(S4h,x[i],x[j]));

// Attention: S4h,x, declaree(s) comme variable(s) globale(s)

$$\begin{bmatrix} -2, & -2, & -2, & 0 \\ -2, & -8, & -6, & 0 \\ -2, & -6, & -6, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -4 \end{bmatrix}$$

124 factor(det(l1*MS3+l2*MS4));//les solutions sont (l1,l2) =(1,-1),(2,1),(1,2),(2,19)

$$-16 \cdot (l1 - 2 \cdot l2) \cdot (l1 + l2) \cdot (2 \cdot l1 - l2) \cdot (19 \cdot l1 - 2 \cdot l2)$$

125 Donc les 4 noyaux suivants donnent 4 points de l'espace projectif de dimension
3 tels que S3 inter S4 soit sur un cone de degre 2 de sommet ce point. cette
intersection se projette donc en une conique double depuis ces points. Il y en
a 3 a l'infini et le point (0,0).
On trouve donc les 3 projections selon les vecteurs (0,1,-1),(0,0,-1),(3,0,-1)
et la projection centrale de centre (0,0,0). Essayons d'eliminer z avec la
projections selon (0,1,-1)

126 ker(MS3-MS4);ker(2*MS3+MS4);ker(MS3+2*MS4);ker(2*MS3+19*MS4);

$$([0,1,-1,0], [0,0,0,-1], [0,0,-1,0], [3,0,-1,0])$$

127 M:=[x,y,0]+t*[0,1,-1];

$$[x, y+t, -t]$$

128 proj3:=resultant(unapply(S3,x,y,z)(op(M)),unapply(S4,x,y,z)(op(M)),t);

$$64 \cdot x^4 + 96 \cdot x^3 \cdot y + 180 \cdot x^2 \cdot y^2 + 48 \cdot x^2 + 108 \cdot x \cdot y^3 + 36 \cdot x \cdot y + 81 \cdot y^4 + 54 \cdot y^2 + 9$$

129 factor(proj3);//c'est bien une conique double.

$$(8 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + 9 \cdot y^2 + 3)^2$$

130 ---Exercice-----------------------------------

131 G:=t^2*(x^2+y^2-1)+t*(x*y+y^2-x^2)+(x^2+2*y^2-1)

$$t^2 \cdot (x^2 + y^2 - 1) + t \cdot (x \cdot y + y^2 - x^2) + x^2 + 2 \cdot y^2 - 1$$

132 dG:=diff(G,t)

$$2 \cdot t \cdot (x^2 + y^2 - 1) + x \cdot y + y^2 - x^2$$

133 eq:=resultant(G,dG,t)

6 5 4 2 4 3 2 4 2 2 2 5 3 6 4

134 factor(eq);

$$(x^2 + y^2 - 1) \cdot (3 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 \cdot y + 13 \cdot x^2 \cdot y^2 - 8 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y^3 + 7 \cdot y^4 - 12 \cdot y^2 + 4)$$

135 c'est divisible par le coefficient de t^2 dans G! En effet, on a calcule un resultant entre un polyn\^ome de degre 2 et un autre de degre 1. Mais en un point ou x^2+y^2=1, le degre de ces polynomes chute de 1, et l'on aurait donc du prendre pour un tel point une formule de resultant pour degre inferieur. On a donc rajoute des solution a notre probleme. l'equation de l'enveloppe est donc:

136 eqenv:=normal(eq/(coeff(G,t^2)))

$$3 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 \cdot y + 13 \cdot x^2 \cdot y^2 - 8 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y^3 + 7 \cdot y^4 - 12 \cdot y^2 + 4$$

137 Gt:=unapply(G,t)

$$t \ \to t^2 \cdot (x^2 + y^2 - 1) + t \cdot (x \cdot y + y^2 - x^2) + x^2 + 2 \cdot y^2 - 1$$

138 dGt:=unapply(diff(G,t),t)

$$t \ \to 2 \cdot t \cdot (x^2 + y^2 - 1) + x \cdot y + y^2 - x^2$$

139 envel:=implicitplot(eqenv,x=-7..7,y=-7..7,xstep=0.01,ystep=0.01,affichage=blue+line_width_3):;

Done

140

141 Fig Edit Graphe Repere Mode Ste Landscap

1 envel;

Done

2 u:=element([(-5) .. 5,0.6,0.1])

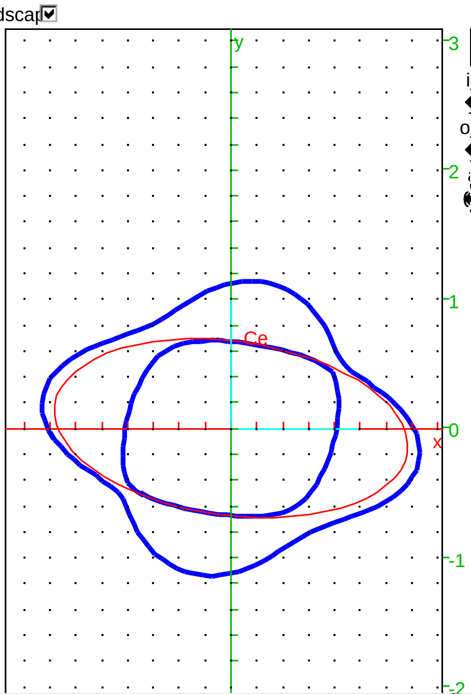
parameter([u,-5,5,0.6,0.1])

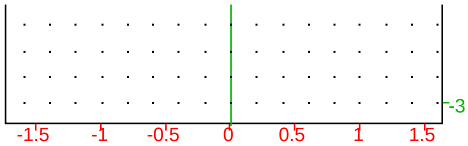
3 Ce:=implicitplot(Gt(u),x=-7..7,y=-7..7,couleur=rouge+line_width_1);

Ellipsis of center (0.0,0.0)

plotparam((0.132733151+0.9911518101*I)*(0.6732806445*cos(t)+(1.3

4





142 ----------------------------Exercice---

143 P:=x^4+x+1;

$x^4 + x + 1$

144 A:=1/d*add(a[j]*x^j,j=0..degree(P)-1);

$(\frac{1}{d}) \cdot (a[0] + (a[1]) \cdot x + (a[2]) \cdot x^2 + (a[3]) \cdot x^3)$

145 H:=d*A;

$d \cdot (\frac{1}{d}) \cdot (a[0] + (a[1]) \cdot x + (a[2]) \cdot x^2 + (a[3]) \cdot x^3)$

146 M:=matrix([seq([seq(coeff(rem(A*x^ii,P,x),x,j),ii=0..degree(P)-1)],j=0..degree(P)-1)]);

$$\begin{bmatrix} \frac{a[0]}{d}, & \frac{-(a[3])}{d}, & \frac{-(a[2])}{d}, & \frac{-(a[1])}{d} \\ \frac{a[1]}{d}, & \frac{a[0]-(a[3])}{d}, & \frac{-(a[3])-(a[2])}{d}, & \frac{-(a[2])-(a[1])}{d} \\ \frac{a[2]}{d}, & \frac{a[1]}{d}, & \frac{a[0]-(a[3])}{d}, & \frac{-(a[3])-(a[2])}{d} \\ \frac{a[3]}{d}, & \frac{a[2]}{d}, & \frac{a[1]}{d}, & \frac{a[0]-(a[3])}{d} \end{bmatrix}$$

147 M:=matrix(4,4,(ii,j)->coeff(rem(A*x^(j),P),x,ii)); //c'est plus simple

// Attention: A,x,P, declaree(s) comme variable(s) globale(s)

$$\begin{bmatrix} \frac{a[0]-(a[3])}{d}, & \frac{-(a[3])-(a[2])}{d}, & \frac{-(a[2])-(a[1])}{d}, & \frac{a[3]-(a[1])-(a[0])}{d} \\ \frac{a[1]}{d}, & \frac{a[0]-(a[3])}{d}, & \frac{-(a[3])-(a[2])}{d}, & \frac{-(a[2])-(a[1])}{d} \\ \frac{a[2]}{d}, & \frac{a[1]}{d}, & \frac{a[0]-(a[3])}{d}, & \frac{-(a[2])-(a[3])}{d} \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

148 cp:=charpoly(M,x):;

Done

149 res:=resultant(subst(P,x=y),d*x-subst(H,x=y),y):; //attention re est un mot reserve

Done

150 le poly caract est 1/d^(deg P) * resultant: verification:

151 normal(d^(degree(P))*cp-res); //ils sont bien egaux

$d^3 \cdot x^3 \cdot (a[0]) -3 \cdot d^2 \cdot x^2 \cdot (a[0])^2 + 3 \cdot d^2 \cdot x^2 \cdot (a[0]) \cdot (a[3]) -2 \cdot d^2 \cdot x^2 \cdot (a[1]) \cdot (a[3]) -d^2 \cdot x^2 \cdot (a[2])^2 + 3 \cdot d \cdot x \cdot (a[0])^3 -6$
$3 \cdot d \cdot x \cdot (a[0]) \cdot (a[2])^2 + 3 \cdot d \cdot x \cdot (a[0]) \cdot (a[3])^2 -3 \cdot d \cdot x \cdot (a[1])^2 \cdot (a[2]) -3 \cdot d \cdot x \cdot (a[1]) \cdot (a[3])^2 + 3 \cdot d \cdot x \cdot (a[2]) \cdot (a[3])$
$-2 \cdot (a[0])^2 \cdot (a[2])^2 -3 \cdot (a[0])^2 \cdot (a[3])^2 + (a[0]) \cdot (a[1])^3 + 4 \cdot (a[0]) \cdot (a[1])^2 \cdot (a[2]) + 3 \cdot (a[0]) \cdot (a[1]) \cdot (a[2]) \cdot (a[3]) + 5 \cdot$
$(a[0]) \cdot (a[3])^3 -(a[1])^4 -3 \cdot (a[1])^2 \cdot (a[2]) \cdot (a[3]) -2 \cdot (a[1])^2 \cdot (a[3])^2 + (a[1]) \cdot (a[2])^3 + 4 \cdot (a[1]) \cdot (a[2])^2 \cdot (a[3]) -(a[1]) \cdot$

152 P:=x^4+1;

$x^4 + 1$

153 A:=x^2:;H:=A;

(Done, x^2)

154 M:=matrix([seq([seq(coeff(rem(A*x^ii,P,x),x,j),ii=0..degree(P)-1)],j=0..degree(P)-1)]);

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

155 cp:=charpoly(M,x):;

Done

156 res:=resultant(unapply(P,x)(y),x-unapply(H,x)(y),y):;

Done

157 le poly caract est 1/d^(deg P) * resultant: verification:

158 normal(cp-res);

0

159 le poly min est une puissance de:

160 gcd(res,diff(res,x));

$x^2 + 1$

161 pmin(M,x);//ils sont egaux.

$x^2 + 1$